Tekniska Högskolan i Linköping
Matematiska Institutionen
Optimeringslära
Kaj Holmberg

Optimering av realistiska sammansatta system
Lösning till tentamen
2018-01-13

Lösningar/svar

Uppgift 1

1a: Variabeldefinition: $x_j = 1$ om paket j tas med, 0 om inte.

max $z = 3x_1 + 7x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 9x_5$
då $5x_1 + 12x_2 + 7x_3 + 6x_4 + 8x_5 \leq 30$
$x_j \in \{0, 1\}$ för $j = 1, 2, 3, 4, 5$

1b: Indata: c_k : värde, a_k : vikt.
Definitioner:
Tillstånd: $s_k =$ den vikt (kg) som får användas till de k första paketen.
Styrning: $x_k = 1$ om paket k tas med, 0 om inte.
Överföringsfunktion: $s_{k-1} = s_k - a_k x_k$.
Målfunktion: $f_k(s_k) = \max_{x_k}(c_k x_k + f_{k-1}(s_{k-1}))$.
$0 \leq s_k \leq 30$ för alla k. $s_0 \geq 0$, $s_5 = 30$. $f_0(s_0) = 0$.

(Om vi räknar s_k i enheter om 5 kg, blir $0 \leq s_k \leq 6$ för alla k. $s_5 = 6$.)

1c: Efter avrundning fås problemet

max $z = 3x_1 + 7x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 9x_5$
då $x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 \leq 6$
$x_j \in \{0, 1\}$ för $j = 1, 2, 3, 4, 5$

Iteration 1:

$x_1 \backslash s_1$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	-	3	3	3	3	3	3
$f_1(s_1)$	0	3	3	3	3	3	3
$\hat{x}_1(s_1)$	0	1	1	1	1	1	1

Iteration 2:

$x_2 \backslash s_2$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	3	3	3	3	3	3
1	-	-	7	10	10	10	10
$f_2(s_2)$	0	3	7	10	10	10	10
$\hat{x}_2(s_2)$	0	0	1	1	1	1	1

Iteration 3:

$x_3 \backslash s_3$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	3	7	10	10	10	10
1	-	5	8	12	15	15	15
$f_3(s_3)$	0	5	8	12	15	15	15
$\hat{x}_3(s_3)$	0	1	1	1	1	1	1

Iteration 4:

$x_4 \backslash s_4$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	5	8	12	15	15	15
1	-	4	9	12	16	19	19
$f_4(s_4)$	0	5	9	12	16	19	19
$\hat{x}_4(s_4)$	0	0	1	0	1	1	1

Iteration 5:

$x_5 \backslash s_5$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	5	9	12	16	19	19
1	-	-	9	14	18	21	25
$f_5(s_5)$	0	5	9	14	18	21	25
$\hat{x}_5(s_5)$	0	0	0	1	1	1	1

Uppnystning: $s_5 = 6$, $x_5 = 1$, $s_4 = 4$, $x_4 = 1$, $s_3 = 3$, $x_3 = 1$, $s_2 = 2$, $x_2 = 1$, $s_1 = 0$, $x_1 = 0$, $s_0 = 0$. $z = 25$.
Svar i ord: Ta med paket 2, 3, 4 och 5. Totalt värde: 25.

1d: Lösningen (0,1,1,1,1) väger 33 kg, vilket är mer än 30 kg, så den är inte tillåten. Eftersom varje paket väger mer än 3 kg, blir lösningen tillåten om vi tar bort ett paket. Smartast är då att ta bort det som har minst värde, dvs. paket 4. Det ger följande lösning: Ta med paket 2, 3 och 5. Totalt värde: 21. Den tillåtna lösningen ger undre gräns 21. Om vi visste att riktiga optimum var tillåtet i det modifierade bivillkoret skulle vi få en övre gräns på 25, men det vet vi tyvärr inte.

1e: Använd kolumnen med $s_k = 5$ i uppgift c. Nysta upp: $s_5 = 5$, $x_5 = 1$, $s_4 = 3$, $x_4 = 0$, $s_3 = 3$, $x_3 = 1$, $s_2 = 2$, $x_2 = 1$, $s_1 = 0$, $x_1 = 0$, $s_0 = 0$. $z = 21$.
Svar i ord: Ta med paket 2, 3 och 5. Totalt värde: 21.

Denna lösning väger 27 kg, vilket är mer än 25 kg, så den är inte tillåten. Paketet med minst värde i lösningen är paket 3, så vi tar bort det, och får följande lösning: Ta med paket 2 och 5. Total vikt: 20. Totalt värde: 16. Vi har en undre gräns på 16.

Uppgift 2

min $z = -3x_1 - 7x_2 - 5x_3 - 4x_4 - 9x_5$
då $\quad 5x_1 + 12x_2 + 7x_3 + 6x_4 + 8x_5 \leq 30$
$x_j \in \{0, 1\}$ för $j = 1, 2, 3, 4, 5$

2a: Subproblem (Lagrangerelaxation):

$\varphi(\bar{u}) = \min -3x_1 - 7x_2 - 5x_3 - 4x_4 - 9x_5 + u(5x_1 + 12x_2 + 7x_3 + 6x_4 + 8x_5 - 30) =$
$(5u - 3)x_1 + (12u - 7)x_2 + (7u - 5)x_3 + (6u - 4)x_4 + (8u - 9)x_5 - 30u$
då $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in \{0, 1\}$

F.ö. se kurslitteraturen.

2b: $\bar{u} = 0.6$ ger $\varphi(0.6) = \min 0.2x_2 - 0.8x_3 - 0.4x_4 - 4.2x_5 - 18$ då $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in \{0, 1\}$,
vilket har lösningen x_1 egal, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 1$, $x_5 = 1$, och $\varphi(0.6) = -23.4$, vilket ger $\underline{v} = -23.4$. Subgradient: $\xi = -9 > 0$ om $x_1 = 0$ och $\xi = -4 > 0$ om $x_1 = 1$, så sätt $x_1 = 1$. Lösningen tillåten och $\bar{v} = -21$.

$\bar{u} = 0.7$ ger $\varphi(0.7) = \min 0.5x_1 + 1.4x_2 - 0.1x_3 + 0.2x_4 - 3.4x_5 - 21$ då $x_2, x_3, x_4, x_5 \in \{0, 1\}$,
vilket har lösningen $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 0$, $x_5 = 1$, och $\varphi(0.7) = -24.5$, vilket inte förbättrar undre gränsen. Vi får subgradient $\xi = -15 < 0$, lösningen tillåten, men övre gränsen förbättras inte.

$\bar{u} = 1$ ger $\varphi(1) = \min 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 - x_5 - 30$ då $x_2, x_3, x_4, x_5 \in \{0, 1\}$,
vilket har lösningen $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = 1$, och $\varphi(1) = -31$, vilket inte ger en bättre undre gräns. Vi får subgradient $\xi = -22 < 0$, lösningen tillåten, men övre gränsen förbättras inte.

Bästa gränser: $-23.4 \leq v^* \leq -21$. Gränserna visar inte huruvida vi har funnit optimum.

2c: Vi vill alltså att minimering av $(5u-3)x_1+(12u-7)x_2+(7u-5)x_3+(6u-4)x_4+(8u-9)x_5$ ska ge lösningen $x_2=0$, $x_2=1$, $x_3=1$, $x_4=0$, $x_5=1$. Detta kräver att $(5u-3)\geq 0$, $(12u-7)\leq 0$, $(7u-5)\leq 0$, $(6u-4)\geq 0$ och $(8u-9)\leq 0$, dvs. $u\geq 3/5$, $u\leq 7/12$, $u\leq 5/7$, $u\geq 2/3$ och $u\leq 9/8$, vilket saknar lösning (ty $7/12<8/12=2/3$). Vi har alltså inte styrbarhet.

Uppgift 3

3a: Dantzig-Wolfe: Subproblemet återfinnes ovan (men med $0\leq x\leq 1$ istället för $x\in\{0,1\}$, vilket inte gör någon skillnad). Masterproblemet blir

$$\begin{array}{ll} \max & q \\ \text{då} & q\leq -3x_1^{(l)}-7x_2^{(l)}-5x_3^{(l)}-4x_4^{(l)}-9x_5^{(l)}+u(5x_1^{(l)}+12x_2^{(l)}+7x_3^{(l)}+6x_4^{(l)}+8x_5^{(l)}-30) \ \text{ för alla } l \\ & u\geq 0 \end{array}$$

Metoden itererar mellan subproblemet och masterproblemet. Subproblemet löses för givna värden på u, och ger en undre gräns, $\varphi(\bar{u})$, samt en ny lösning, $x^{(l)}$, till masterproblemet. Masterproblemet löses med alla kända $x^{(l)}$, och ger en övre gräns, samt nytt $\bar{u}$ till subproblemet. Metoden avslutas då den undre gränsen är lika med den övre. Då läser man ut den duala lösningen, λ, till masterproblemet, och skapar den optimala lösningen som $\sum_l \lambda_l x^{(l)}$.

3b: Punkten (0, 0, 1, 1, 1) ger snitt: $q\leq -18-9u$.
Punkten (1, 0, 1, 1, 1) ger snitt: $q\leq -21-4u$.
Punkten (1, 1, 1, 1, 1) ger snitt: $q\leq -28+8u$.

Masterproblemet blir alltså

$$\begin{array}{rlll} v_{DM}=\max & q & & \\ \text{då} & q\leq & -18-9u & (1) \\ & q\leq & -21-4u & (2) \\ & q\leq & -28+8u & (3) \\ & u\geq & 0 & \end{array}$$

Insättning av den föreslagna lösningen $u=7/12$ ger $q\leq -93/4=-23\ 1/4$ i första snittet, $q\leq -70/3=-23\ 1/3$ i andra snittet, och $q\leq -23\ 1/3$ i tredje snittet. Det visar att snitt 2 och 3 är aktiva i den punkten, och eftersom en av den har positiv lutning och den andra negativ lutning, måste det vara maximum. (Om vi minskar u, ser snitt 3 till att värdet på q minskar. Om vi ökar u, ser snitt 2 till att värdet på q minskar.) (Grafisk lösning duger också som motivation.)

Vi får alltså $\bar{v}=v_{DM}=-23\ 1/3$.

LP-dualen av masterproblemet blir

$$\begin{array}{ll} v_{DM}=\min & -18\lambda_1-21\lambda_2-28\lambda_3 \\ \text{då} & 9\lambda_1+4\lambda_2-8\lambda_3\geq 0 \\ & \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1 \\ & \lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\geq 0 \end{array}$$

Komplementaritet ger $\lambda_1=0$ (eftersom snitt 1 inte är aktivt) samt $4\lambda_2-8\lambda_3=0$ (eftersom $u>0$), dvs. samt $\lambda_2=2\lambda_3$. Tillsammans med $\lambda_2+\lambda_3=1$ ger detta $\lambda_2=2/3$ och $\lambda_3=1/3$.

Den optimala primala lösningen blir $x = \lambda_2 x^{(2)} + \lambda_3 x^{(3)} = 2/3(1,0,1,1,1) + 1/3(1,1,1,1,1) = (1, 1/3, 1, 1, 1)$. (Extrakoll: Insättning ger att bivillkoret är uppfyllt med likhet.)

Uppgift 4

4a: Subproblemet (för fixerat y):

$$
\begin{array}{rlcrcrcrcll}
\psi(\bar{y}) = & \min & -5x_1 & - & 3x_2 & - & 2x_3 & + & 10\bar{y}_1 + 12\bar{y}_2 & \\
& \text{då} & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq & 2 + 3\bar{y}_1 + 2\bar{y}_2 & (1) \\
& & x_1 & + & 2x_2 & & & \leq & 3 & (2) \\
& & x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

LP-dualen av subproblemet:

$$
\begin{array}{rrcr}
\psi(\bar{y}) = \max & (-2 - 3\bar{y}_1 - 2\bar{y}_2)u_1 - 3u_2 + 10\bar{y}_1 + 12\bar{y}_2 & & \\
\text{då} & -u_1 - u_2 & \leq & -5 \\
& -u_1 - 2u_2 & \leq & -3 \\
& -u_1 & \leq & -2 \\
& u_1, u_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

De duala bivillkoren kan skrivas $U = \{u \geq 0 : u_1 + u_2 \geq 5, u_1 + 2u_2 \geq 3, u_1 \geq 2\}$.

Benders masterproblem:

$$
\begin{array}{ll}
\min & q \\
\text{då} & q \geq (10 - 3u_1^{(l)})y_1 + (12 - 2u_1^{(l)})y_2 - 2u_1^{(l)} - 3u_2^{(l)} \quad \text{för alla } l \\
& y_1, y_2 \in \{0,1\}
\end{array}
$$

Metoden itererar mellan subproblemet och masterproblemet. Subproblemet löses för givna värden på y, och ger en övre gräns, $h(\bar{y})$, samt en ny lösning, $u^{(l)}$, till masterproblemet. Masterproblemet löses med alla kända $u^{(l)}$, och ger en undre gräns, samt nya $\bar{y}$ till subproblemet. Metoden avslutas då den undre gränsen är lika med den övre.

4b: För $\bar{y} = (0,0)$: $\psi(\bar{y}) = \max -2u_1 - 3u_2$ då $u \in U$.
Lösningen är $u_1 = 5$, $u_2 = 0$, med med $\psi(\bar{y}) = -10$, vilket ger $\bar{v} = -10$. Benderssnittet blir $q \geq -5y_1 + 2y_2 - 10$.

Benders masterproblem:

$$
\begin{array}{ll}
\min & q \\
\text{då} & q \geq -5y_1 + 2y_2 - 10 \\
& y_1, y_2 \in \{0,1\}
\end{array}
$$

Den bästa lösningen är $y_1 = 1$, $y_2 = 0$ med $q = -15$. Vi har nu $-15 \leq v^* \leq -10$.

För $\bar{y} = (1,0)$: $\psi(\bar{y}) = \max -5u_1 - 3u_2 + 10$ då $u \in U$.
Lösningen är $u_1 = 2$, $u_2 = 3$, med med $\psi(\bar{y}) = -9$, vilket inte förbättrar övre gränsen.
Benderssnittet blir $q \geq 4y_1 + 8y_2 - 13$.

Benders masterproblem:

$$
\begin{array}{ll}
\min & q \\
\text{då} & q \geq -5y_1 + 2y_2 - 10 \\
& q \geq 4y_1 + 8y_2 - 13 \\
& y_1, y_2 \in \{0,1\}
\end{array}
$$

Problemet kan lösas genom att stoppa in de fyra möjliga y-lösningarna i de två snitten och välja den bästa, vilket blir $y_1 = 0$ och $y_2 = 0$, med $q = -10$, vilket ger $\underline{v} = -10$. Vi har nu $-10 \leq v^* \leq -10$, vilket visar att optimum har uppnåtts.

Det var $\bar{y} = (0, 0)$ som gav $\psi(\bar{y}) = -10$. Då var enbart det första duala bivillkoret aktivt, så komplementaritet ger $x_2 = 0$ och $x_3 = 0$. Dessutom var $u_1 > 0$, så bivillkor 1 i subproblemet måste vara aktivt, vilket här ger $x_1 = 2$ (eftersom allt annat är noll).

Den optimala lösningen är alltså $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ samt $y_1 = 0$ och $y_2 = 0$, med $v^* = -10$. Svar i ord: Tomten ska inte ta med några extra renar, de är för dyra i drift. Han fokuserar på julklappar av typ 1.

4c: Genom att rita upp det tillåtna området till dualen av subproblemet, ser man att duala bivillkor 2 och 3 är redundanta, och att U bara har två extrempunkter. (Det var de vi fick under lösningens gång.) Man kan se att subproblemet aldrig kommer att sakna lösning, oavsett hur vi fixerar y, så LP-dualen kommer aldrig att få obegränsad lösning, dvs. extremriktningarna i dualen ger inga snitt. Det betyder att det fullständiga masterproblemet enbart har två snitt.

Uppgift 5

5a: En bil: Nod 2 och 4 har udda valens. Dubblering av bågarna (1,2) och (1,4) är billigaste sättet att ge alla noder jämn valens. Kostnaden för turen blir $61 + 9 = 70$. Tiden blir 70, och fasta kostnaden 10. Målfunktionsvärdet blir då $70 + 10 + 70 = 150$.

5b: Två bilar: Troligt bra uppdelning:
Bil 1: Tur 1-2-5-6-3-2-1. Kostnad: 34. Tid: 34.
Bil 2: Tur 1-4-7-8-5-4-1. Kostnad: 36. Tid: 36.
Fast kostnad: 20. Maxtid: 36. Målfunktionsvärdet blir nu $34 + 36 + 20 + 36 = 126$.

5c: Tre bilar: Troligt bra uppdelning:
Bil 1: Tur 2-5-6-3-2. Kostnad: 24. Tid: 24.
Bil 2: Tur 4-7-8-5-4. Kostnad: 28. Tid: 28.
Bil 3: Tur 1-2-1-4-1. Kostnad: 18. Tid: 18.
Fast kostnad: 30. Maxtid: 28. Målfunktionsvärdet blir nu $24 + 28 + 18 + 30 + 28 = 128$.

5d: Totala kostnaden blir lägst för två bilar. (Uppdelningen är inte säkert den bästa, så lösningen är inte säkert optimal.)

Uppgift 6 (kortfattat)

Modellbeskrivning: se projektinformationen.

Förenklingar: Fixera bort vissa fasta kostnader, dvs. heltalsvariabler, genom att i förväg bestämma vissa saker (vissa grossister/bryggerier ska inte ha tomglashantering, vissa mellanlager ska byggas). Klumpa ihop butiker som ligger nära varandra till en nod. Ta bort bågar som motsvarar långa transportavstånd (dvs. bestäm i förväg att inget ska skickas där). Man kan bestämma att butiker bara får leverera till vissa närbelägna grossister, bryggerier, mellanlager.

Observera att huvudresultatet är om och vilka mellanlager som ska byggas, inte exakt hur flödet ska gå. Flödet behövs mest för att evaluera kostnaden för varje utbuggnadsalternativ.

Utvidgningar: Flera butiker. Mångdubblar flödesvariablerna. Flera olika sorters tomförpackningar (flaskor, burkar). Fördubblar antal flödesvariabler och de flesta bivillkor. (Frågan är om de fasta kostnaderna är gemensamma eller separata för de olika sorterna.) Andra och fler omvandlingsfaktorer, fler möjligheter att köpa och sälja olika saker (tomförpackningar, fulla förpackningar mm), dvs. mer interaktion med det omgivande samhället, samt olika straffkostnader på olika hantering, är exempel på utvidgningar som inte gör modellen mycket svårare att lösa.

Uppgift 7 (kortfattat)

Åkaren bör först bestämma vilken väg han/hon ska ta. Det kan antingen ske före den andra optimeringen, eller samtidigt. Gör man det samtidigt, behövs två tillståndsvariabler, och alla kombinatoner av dem måste undersökas. Rimligen finns dock inte väldigt många olika vägar att välja på. Sedan behövs information om de olika vägsegmenten längs vägen. Därefter är det bara att köra programmet.

Uppgift 8 (kortfattat)

Starta med ingen utbyggnad ($y = 0$). Sätt kapaciteter i nätverket. Lös med Vineopt. Läs ut totalkostnad, reducerade kostnader och räkna ut duala konstanten. Notera övre gräns. Beräkna β från de reducerade kostnaderna och beräkna koefficienterna i Benderssnittet. Tillför Benderssnittet till föregående masterproblem och lös med GLPK. Läs ut målfunktionvärde, y-lösning och notera undre gräns. Modifiera kapciteterna i nätverket m.h.a. y. Lös med Vineopt. Iterera tills övre gräns och undre gräns är lika, eller nära nog.

Uppgift 9 (kortfattat)

Gör en första uppdelning av bågar på fordon. Finn en bra tur för varje fordon m.h.a. lösaren för lantbrevbärarproblemet. Förbättra lösningen iterativt med Snowplan. Beräkna totalt målfunktionsvärde och avgör om förbättring har fåtts.

Identifiera det fordon, A, som tar längst tid, samt det eller de fordon, B, som tar kortast tid (egentligen som kan göra mer utan att maxtiden ökas). Flytta bågar från fordon A till fordon B, om de är anslutande turer. Annars flytta bågar från fordon A till fordon C, och sedan från fordon C till fordon B. Det är också intressant att försöka förbättra tilldelningarna på andra sätt, sådant som Snowplan verkar ha missat. Generellt sett kan man försöka undvika udda valens i tilldelningarna. Det är också osannolikt att icke-sammanhängande bågmängder ger en bra tillordning. (Lösaren i Vineopt/Snowplan ger optimal lösning för lantbrevbärarprpblemet om de nödvändiga bågarna bildar en sammanhängande mängd.)

Läs in uppdelningen i Snowplan, och låt Snowplan försöka förbättra lösningen. Upprepa tills nöjd.