Tekniska Högskolan i Linköping	Optimering av realistiska sammansatta system
Matematiska Institutionen	Lösning till tentamen
Optimeringslära	2018-04-04
Kaj Holmberg	

Lösningar/svar

Uppgift 1

1a: Variabeldefinition: $x_j = 1$ om kolli j tas med, 0 om inte.

max $z = 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 12x_4 + 5x_5$
då $2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 10x_4 + 12x_5 \leq 20$
$x_j \in \{0, 1\}$ för $j = 1, 2, 3, 4, 5$

1b: Indata: c_k : värde, a_k : vikt.
Definitioner:
Tillstånd: $s_k =$ den vikt (kg) som får användas till de k första paketen.
Styrning: $x_k = 1$ om paket k tas med, 0 om inte.
Överföringsfunktion: $s_{k-1} = s_k - a_k x_k$.
Målfunktion: $f_k(s_k) = \max_{x_k}(c_k x_k + f_{k-1}(s_{k-1}))$.
$0 \leq s_k \leq 20$ för alla k. $s_0 \geq 0$, $s_5 = 20$. $f_0(s_0) = 0$.

(Om vi räknar s_k i enheter om 5 kg, blir $0 \leq s_k \leq 4$ för alla k. $s_5 = 4$.)

1c: Efter avrundning fås problemet

max $z = 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 12x_4 + 5x_5$
då $x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 \leq 4$
$x_j \in \{0, 1\}$ för $j = 1, 2, 3, 4, 5$

Iteration 1:

$x_1 \setminus s_1$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	3	3	3	3	3
$f_1(s_1)$	3	3	3	3	3
$\hat{x}_1(s_1)$	1	1	1	1	1

Iteration 2:

$x_2 \setminus s_2$	0	1	2	3	4
0	3	3	3	3	3
1	-	8	8	8	8
$f_2(s_2)$	3	8	8	8	8
$\hat{x}_2(s_2)$	0	1	1	1	1

Iteration 3:

$x_3 \setminus s_3$	0	1	2	3	4
0	3	8	8	8	8
1	-	10	15	15	15
$f_3(s_3)$	3	10	15	15	15
$\hat{x}_3(s_3)$	0	1	1	1	1

Iteration 4:

$x_4 \setminus s_4$	0	1	2	3	4
0	3	10	15	15	15
1	-	-	15	22	27
$f_4(s_4)$	3	10	15	22	27
$\hat{x}_4(s_4)$	0	0	1	1	1

Iteration 5:

$x_5 \setminus s_5$	0	1	2	3	4
0	3	10	15	22	27
1	-	-	8	15	20
$f_5(s_5)$	3	10	15	22	27
$\hat{x}_5(s_5)$	0	0	0	0	0

Uppnystning: $s_5 = 4$, $x_5 = 0$, $s_4 = 4$, $x_4 = 1$, $s_3 = 2$, $x_3 = 1$, $s_2 = 1$, $x_2 = 1$, $s_1 = 1$, $x_1 = 1$, $s_0 = 1$. $z = 27$.
Svar i ord: Ta med kolli 1, 2, 3 och 4. Totalt värde: 27.

1d: Lösningen (1,1,1,1,0) väger 21 kg, vilket är mer än 20 kg, så den är inte tillåten. Eftersom varje kolli väger mer än 1 kg, blir lösningen tillåten om vi tar bort ett kolli. Smartast är då att ta bort det som har minst värde, dvs. kolli 1. Det ger följande lösning: Ta med kolli 2, 3 och 4. Totalt värde: 24.

1e: Använd kolumnen med $s_k = 3$ i uppgift c. Nysta upp: $s_5 = 3$, $x_5 = 0$, $s_4 = 3$, $x_4 = 1$, $s_3 = 1$, $x_3 = 1$, $s_2 = 0$, $x_2 = 0$, $s_1 = 0$, $x_1 = 1$, $s_0 = 0$. $z = 22$.
Svar i ord: Ta med kolli 1, 3 och 4. Totalt värde: 22.

Denna lösning väger 17 kg, vilket är mer än 15 kg, så den är inte tillåten. Kollit med minst värde i lösningen är kolli 1, så vi tar bort det, och får följande lösning: Ta med kolli 3 och 4. Total vikt: 15. Totalt värde: 19.

Denna lösning är bättre om smutstvätten är värd mer än $24 - 19 = 5$.

Uppgift 2

2a: Subproblem (Lagrangerelaxation):

$\varphi(\bar{u}) = \min -3x_1 - 5x_2 - 7x_3 - 12x_4 - 5x_5 + u(2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 10x_4 + 12x_5 - 20) =$
$(2u-3)x_1 + (4u-5)x_2 + (5u-7)x_3 + (10u-12)x_4 + (12u-5)x_5 - 20u$
då $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in \{0, 1\}$

F.ö. se kurslitteraturen.

2b: $\bar{u} = 1.0$ ger $\varphi(1.0) = \min -x_1 - x_2 - 2x_3 - 2x_4 + 7x_5 - 20$ då $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in \{0, 1\}$, vilket har lösningen $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 1$, $x_5 = 0$, och $\varphi(1.0) = -26$, vilket ger $\underline{v} = -26$. Subgradient: $\xi = 1 > 0$ så lösningen är inte tillåten och ingen undre gräns fås.

$\bar{u} = 1.2$ ger $\varphi(1.2) = \min -0.6x_1 - 0.2x_2 - x_3 + 9.4x_5 - 24$ då $x_2, x_3, x_4, x_5 \in \{0, 1\}$, vilket har lösningen $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$, x_4 egal (välj 0), $x_5 = 0$, och $\varphi(1.2) = -25.8$, $\underline{v} = -25.8$. Vi får subgradient $\xi = -9 < 0$, lösningen tillåten, med övre gränsen $\bar{v} = -15$.

$\bar{u} = 1.4$ ger $\varphi(1.4) = \min -0.2x_1 + 0.6x_2 + 2x_4 + 11.8x_5 - 28$ då $x_2, x_3, x_4, x_5 \in \{0, 1\}$, vilket har lösningen $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, x_3 egal (välj 1), $x_4 = 0$, $x_5 = 0$, och $\varphi(1.4) = -28.2$, vilket inte ger en bättre undre gräns. Vi får subgradient $\xi = -13 < 0$, lösningen tillåten, men övre gränsen förbättras inte.

Bästa gränser: $-25.8 \leq v^* \leq -15$. Gränserna visar inte huruvida vi har funnit optimum.

2c: Vi vill alltså att minimering av $(2u-3)x_1 + (4u-5)x_2 + (5u-7)x_3 + (10u-12)x_4 + (12u-5)x_5$ ska ge lösningen $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 1$, $x_5 = 0$. Detta kräver att $(2u-3) \geq 0$, $(4u-5) \leq 0$, $(5u-7) \leq 0$, $(10u-12) \leq 0$, $(12u-5) \geq 0$, dvs. $u \geq 3/2$, $u \leq 5/4$, $u \leq 7/5$, $u \leq 6/5$ och $u \geq 5/12$, vilket saknar lösning (ty $3/2 > 5/4$). Vi har alltså inte styrbarhet.

Uppgift 3

3a: Dantzig-Wolfe: Subproblemet återfinnes ovan (men med $0 \leq x \leq 1$ istället för $x \in \{0, 1\}$, vilket inte gör någon skillnad). Masterproblemet blir

$$\begin{array}{ll} \max & q \\ \text{då} & q \leq -3x_1^{(l)} - 5x_2^{(l)} - 7x_3^{(l)} - 12x_4^{(l)} - 5x_5^{(l)} \\ & \qquad\qquad +u(2x_1^{(l)} + 4x_2^{(l)} + 5x_3^{(l)} + 10x_4^{(l)} + 12x_5^{(l)} - 20) \;\; \text{för alla } l \\ & u \geq 0 \end{array}$$

Metoden itererar mellan subproblemet och masterproblemet. Subproblemet löses för givna värden på u, och ger en undre gräns, $\varphi(\bar{u})$, samt en ny lösning, $x^{(l)}$, till masterproblemet. Masterproblemet löses med alla kända $x^{(l)}$, och ger en övre gräns, samt nytt $\bar{u}$ till subproblemet. Metoden avslutas då den undre gränsen är lika med den övre. Då läser man ut den duala lösningen, λ, till masterproblemet, och skapar den optimala lösningen som $\sum_l \lambda_l x^{(l)}$.

3b: Punkten (1, 1, 1, 1, 0) ger snitt: $q \leq -27 + u$.
Punkten (1, 1, 1, 0, 0) ger snitt: $q \leq -15 - 9u$.
Punkten (1, 0, 1, 0, 0) ger snitt: $q \leq -10 - 13u$.

Masterproblemet blir alltså

$$\begin{array}{rlll} v_{DM} = \max & q & & \\ \text{då} & q \leq & -27 + u & (1) \\ & q \leq & -15 - 9u & (2) \\ & q \leq & -19_1 - 13u & (3) \\ & u \geq & 0 & \end{array}$$

Grafisk lösning visar att snitt 1 och 2 är aktiva i mimimum, som fås i $u = 1.2$, med $q = -25.8$.

Vi får alltså $\bar{v} = v_{DM} = -25.8$. Vi har tidigare fått $\underline{v} = -25.8$, så detta är optimum.

LP-dualen av masterproblemet blir

$$\begin{array}{ll} v_{DM} = \min & -27\lambda_1 - 15\lambda_2 - 10\lambda_3 \\ \text{då} & -\lambda_1 + 9\lambda_2 + 13\lambda_3 \geq 0 \\ & \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \\ & \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0 \end{array}$$

Komplementaritet ger $\lambda_3 = 0$ (eftersom snitt 3 inte är aktivt) samt $-\lambda_1 + 9\lambda_2 = 0$ (eftersom $u > 0$), dvs. $\lambda_1 = 9\lambda_2$. Tillsammans med $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ ger detta $\lambda_1 = 0.9$ och $\lambda_2 = 0.1$.

Den optimala primala lösningen blir $x = \lambda_1 x^{(1)} + \lambda_2 x^{(1)} = 0.9(1,1,1,1,0) + 0.1(1,1,1,0,0) = (1,1,1,0.9,0)$. (Extrakoll: Insättning ger att bivillkoret är uppfyllt med likhet.)

Lösning av LP-problemet (via LP-dualen) ger samma lösning.

Uppgift 4

4a: Subproblemet (för fixerat y):

$$\begin{array}{rllllllll} \psi(\bar{y}) = & \min & -5x_1 & - & 4x_2 & - & 3x_3 & +8\bar{y}_1 + 12\bar{y}_2 & \\ & \text{då} & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq 8 + 5\bar{y}_1 + 7\bar{y}_2 & (1) \\ & & x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq 0 & \end{array}$$

LP-dualen av subproblemet:

$$\begin{array}{rlrcr} \psi(\bar{y}) = \max & (-8 - 5\bar{y}_1 - 7\bar{y}_2)u_1 + 8\bar{y}_1 + 12\bar{y}_2 & & & \\ \text{då} & -u_1 & \leq & -5 \\ & -u_1 & \leq & -4 \\ & -u_1 & \leq & -3 \\ & u_1 & \geq & 0 \end{array}$$

Den kombinerade effekten av de duala bivillkoren blir faktiskt bara $u_1 \geq 5$.

Benders masterproblem:

$$\begin{array}{ll} \min & q \\ \text{då} & q \geq (8 - 5u_1^{(l)})y_1 + (12 - 7u_1^{(l)})y_2 - 8u_1^{(l)} \quad \text{för alla } l \\ & y_1, y_2 \in \{0, 1\} \end{array}$$

Metoden itererar mellan subproblemet och masterproblemet. Subproblemet löses för givna värden på y, och ger en övre gräns, $h(\bar{y})$, samt en ny lösning, $u^{(l)}$, till masterproblemet. Masterproblemet löses med alla kända $u^{(l)}$, och ger en undre gräns, samt nya $\bar{y}$ till subproblemet. Metoden avslutas då den undre gränsen är lika med den övre.

4b: För $\bar{y} = (0, 0)$: $\psi(\bar{y}) = \max -8u_1$ då $u_1 \geq 5$.
Lösningen är $u_1 = 5$, med med $\psi(\bar{y}) = -40$, vilket ger $\bar{v} = -40$. Benderssnittet blir $q \geq -17y_1 - 23y_2 - 40$.

Benders masterproblem:

$$\begin{array}{ll} \min & q \\ \text{då} & q \geq -17y_1 - 23y_2 - 40 \\ & y_1, y_2 \in \{0, 1\} \end{array}$$

Den bästa lösningen är $y_1 = 0$, $y_2 = 1$ med $q = -63$. Vi har nu $-63 \leq v^* \leq -40$.

För $\bar{y} = (0, 1)$: $\psi(\bar{y}) = \max -15u_1 + 12$ då $u_1 \geq 5$.
Lösningen är $u_1 = 5$, med med $\psi(\bar{y}) = -63$, vilket ger $\bar{v} = -63$. Vi har nu $-63 \leq v^* \leq -63$, vilket visar att optimum är uppnått.

Komplementaritet för subproblemet ger $x_2 = 0$ och $x_3 = 0$ samt $x_1 = 15$.

Den optimala lösningen är alltså $x_1 = 15$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ samt $y_1 = 0$ och $y_2 = 1$, med $v^* = -63$. Svar i ord: Köp en takbox av typ 2, och ta med 15 enheter av bagagetyp 1.

4c: Det tillåtna området till dualen av subproblemet har bara en extrempunkt. Man kan se att subproblemet aldrig kommer att sakna lösning, oavsett hur vi fixerar y, så LP-dualen kommer aldrig att få obegränsad lösning, dvs. extremriktningarna i dualen ger inga snitt. Det betyder att det fullständiga masterproblemet enbart har ett snitt.

4d: Det är alltid så (oavsett y) att x_1 är bättre än x_2 och x_3, så i alla optimallösningar till subproblemet kommer x_2 och x_3 att vara noll. (De motsvarande duala bivillkoren blir aldrig aktiva.) Man kan därför ta bort x_2 och x_3 ur problemet.

Uppgift 5

5a: En bil: Nod 2 och 6 har udda valens. Dubblering av bågarna (1,2) och (1,6) är billigaste sättet att ge alla noder jämn valens. Kostnaden för turen blir $41 + 8 = 49$. Tiden blir 49, och fasta kostnaden 10. Målfunktionsvärdet blir då $49 + 10 + 49 = 108$.

5b: Två bilar: Troligt bra uppdelning:
Bil 1: Tur 1-2-4-6-1. Kostnad: 21. Tid: 21.
Bil 2: Tur 2-3-4-5-6-1-2. Kostnad: 28. Tid: 28.
(Observera att bil 1 tar bågarna (2,4) och (4,6).)
Fast kostnad: 20. Maxtid: 28. Målfunktionsvärdet blir nu $21 + 28 + 20 + 28 = 97$.

5c: Tre bilar: Troligt bra uppdelning:
Bil 1: Tur 1-2-1-6-1. Kostnad: 16. Tid: 16.
Bil 2: Tur 2-3-4-2. Kostnad: 17. Tid: 17.
Bil 3: Tur 4-5-6-4. Kostnad: 16. Tid: 16.
Fast kostnad: 30. Maxtid: 17. Målfunktionsvärdet blir nu $16+17+16+30+17 = 96$.

5d: Totala kostnaden blir lägst för tre bilar. (Uppdelningen är inte säkert den bästa, så lösningen är inte säkert optimal.)

Uppgift 6 (kortfattat)

Modellbeskrivning: se projektinformationen. Antal butiker är mycket större i verkligheten.

Förenklingar: Fixera bort vissa fasta kostnader, dvs. heltalsvariabler, genom att i förväg bestämma vissa saker (vissa grossister/bryggerier ska inte ha tomglashantering, vissa mellanlager ska byggas). Klumpa ihop butiker som ligger nära varandra till en nod. Ta bort bågar som motsvarar långa transportavstånd (dvs. bestäm i förväg att inget ska skickas där). Man kan bestämma att butiker bara får leverera till vissa närbelägna grossister, bryggerier, mellanlager.

Uppgift 7 (kortfattat)

Det behövs två tillståndsvariabler, en för hur mycket batteriladdning man har kvar och en för vilken nod man kommit till, och alla kombinationer av dem måste undersökas. Man har två sorters styrningsvariabler: vilken inställning motorn har och vilken nod man kommer ifrån. Metoden kan fortfarande vara skapligt effektiv om det bara finns ett fåtal möjligheter till vägval. Observera att vägvalet måste ske i nivåer.

Uppgift 8 (kortfattat)

Varje möjlig utbyggnad kommer då att modelleras av flera binära variabler. Det betyder att valfriheten och antalet variabler kommer att öka mycket, och att Benders masterproblem kommer att bli svårare.

Om del 3 inte kan göras om inte del 1 och/eller del 2 har gjorts, kan det modelleras som $x_3 \leq x_1 + x_2$, med binära variabler. Det gör att alla kombinationer av de binära variablerna inte kommer att vara tillåtna.

Dessa komplikationer uppträder bara i masterproblemet. Subproblemet blir inte svårare, och det totala antalet snitt ökar i princip inte. Masterproblemet får dock flera variabler, dvs. flera dimensioner, och flera bivillkor, vilket ger flera snitt, så flera iterationer kan nog förväntas.

Uppgift 9 (kortfattat)

Alla problem har gemensamt att det handlar om ett eller flera fordon som kör i cykler och som kan använda gator för transport.

Metoden fungerar nog bra för sophämtning, eftersom “efterfrågan” är konstant, så fasta rutter kan vara bra. Man vill nog inte ta en halv gata, så man kan ju enkelt räkna ut hur lång tid varje gata tar. Förenklingarna är nog mindre allvarliga än för snöröjning.

Detsamma gäller för upptagning av sand.

När det gäller leverans av varor, kommer (sannolikt) efterfrågan att variera, så man måste lösa om problemet varje gång. Å andra sidan är nog antalet fordon ganska litet. Om väldigt få beställer, handlar det mer om att åka till vissa punkter än att täcka vissa gator, så efterfrågan ligger i vissa noder, inte längs bågarna. Det ger ett ganska annorlunda problem (mer av handelsresandetyp).