Tekniska Högskolan i Linköping
Matematiska Institutionen
Optimeringslära
Kaj Holmberg

Optimering av realistiska sammansatta system
Lösning till tentamen
2018-08-28

Lösningar/svar

Uppgift 1

1a: Variabeldefinition: $x_j = 1$ om kolli j tas med, 0 om inte.

max $z = 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 9x_4 + 5x_5 + 6x_6$
då $\quad 7x_1 + 11x_2 + 13x_3 + 10x_4 + 12x_5 + 15x_6 \leq 35$
$x_j \in \{0, 1\}$ för $j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

1b: Indata: c_k : värde, a_k : vikt.
Definitioner:
Tillstånd: $s_k =$ den vikt (kg) som får användas till de k första sakerna.
Styrning: $x_k = 1$ om kolli k tas med, 0 om inte.
Överföringsfunktion: $s_{k-1} = s_k - a_k x_k$.
Målfunktion: $f_k(s_k) = \max_{x_k}(c_k x_k + f_{k-1}(s_{k-1}))$.
$0 \leq s_k \leq 35$ för alla k. $s_0 \geq 0$, $s_5 = 35$. $f_0(s_0) = 0$.

(Om vi räknar s_k i enheter om 5 kg, blir $0 \leq s_k \leq 7$ för alla k. $s_5 = 7$.)

1c: Efter avrundning fås problemet

max $z = 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 9x_4 + 5x_5 + 6x_6$
då $\quad x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 2x_5 + 3x_6 \leq 7$
$x_j \in \{0, 1\}$ för $j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

Iteration 1:

$x_1 \backslash s_1$	0	1	2	3	4	5	7	
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	-	3	3	3	3	3	3	3
$f_1(s_1)$	0	3	3	3	3	3	3	3
$\hat{x}_1(s_1)$	0	1	1	1	1	1	1	1

Iteration 2:

$x_2 \backslash s_2$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	3	3	3	3	3	3	3
1	-	-	5	8	8	8	8	8
$f_2(s_2)$	0	3	5	8	8	8	8	8
$\hat{x}_2(s_2)$	0	0	1	1	1	1	1	1

Iteration 3:

$x_3 \backslash s_3$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	3	5	8	8	8	8	8
0	-	-	-	7	10	12	15	15
$f_3(s_3)$	0	3	5	8	10	12	15	15
$\hat{x}_3(s_3)$	0	0	0	0	1	1	1	1

Iteration 4:

$x_4 \backslash s_4$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	3	5	8	10	12	15	15
1	-	-	9	12	14	17	19	21
$f_4(s_4)$	0	3	9	12	14	17	19	21
$\hat{x}_4(s_4)$	0	0	1	1	1	1	1	1

Iteration 5:

$x_5 \backslash s_5$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	3	9	12	14	17	19	21
1	-	-	5	8	14	17	19	22
$f_5(s_5)$	0	3	9	12	14	17	19	22
$\hat{x}_5(s_5)$	0	0	0	0	0	0	0	1

Iteration 6:

$x_6 \backslash s_6$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	3	9	12	14	17	19	22
1	-	-	-	6	9	15	18	20
$f_6(s_6)$	0	3	9	12	14	17	19	22
$\hat{x}_5(s_5)$	0	0	0	0	0	0	0	0

Uppnystning: $s_6 = 7$, $x_6 = 0$, $s_5 = 7$, $x_5 = 1$, $s_4 = 5$, $x_4 = 1$, $s_3 = 3$, $x_3 = 0$, $s_2 = 3$, $x_2 = 1$, $s_1 = 1$, $x_1 = 1$, $s_0 = 0$. $z = 22$.
Svar i ord: Ta med kolli 1, 2, 4 och 5. Totalt värde: 22.

1d: Lösningen (1,1,0,1,1,0) väger 40 kg, vilket är mer än 35 kg, så den är inte tillåten. Eftersom varje kolli väger mer än 5 kg, blir lösningen tillåten om vi tar bort ett kolli. Smartast är då att ta bort det som har minst värde, dvs. kolli 1. Det ger följande lösning: Ta med kolli 2, 4 och 5. Totalt värde: 19.

1e: Använd kolumnen med $s_k = 6$ i uppgift c. Nysta upp: $s_6 = 6$, $x_6 = 0$, $s_5 = 6$, $x_5 = 0$, $s_4 = 6$, $x_4 = 1$, $s_3 = 4$, $x_3 = 1$, $s_2 = 1$, $x_2 = 0$, $s_1 = 1$, $x_1 = 1$, $s_0 = 0$. $z = 19$.
Svar i ord: Ta med kolli 1, 3 och 4. Totalt värde: 19.

Denna lösning väger 30 kg, vilket är tillåtet. Totalt värde: 19, lika bra som ovan.

Uppgift 2

2a: Subproblem (Lagrangerelaxation):

$\varphi(\bar{u}) = \min -3x_1 - 5x_2 - 7x_3 - 9x_4 - 5x_5 - 6x_6 + u(7x_1 + 11x_2 + 13x_3 + 10x_4 + 12x_5 + 15x_6 - 35) = (7u-3)x_1 + (11u-5)x_2 + (13u-7)x_3 + (10u-9)x_4 + (12u-5)x_5 + (15u-6)x_6 - 35u$
då $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \in \{0,1\}$

F.ö. se kurslitteraturen.

2b: $\bar{u} = 0$ ger $\varphi(0) = \min -3x_1 - 5x_2 - 7x_3 - 9x_4 - 5x_5 - 6x_6$ då $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in \{0,1\}$, vilket har lösningen $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 1$, $x_5 = 1$, $x_6 = 1$, och $\varphi(0) = -35$, vilket ger $\underline{v} = -35$. Subgradient: $\xi = 33 > 0$ så lösningen är inte tillåten och ingen övre gräns fås.

$\bar{u} = 0.4$ ger $\varphi(0.4) = \min -0.2x_1 - 0.6x_2 - 1.8x_3 - 5x_4 - 0.2x_5 - 14$ då $x_2, x_3, x_4, x_5 \in \{0,1\}$,
vilket har lösningen $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 1$, $x_5 = 1$, $x_6 = 0$, och $\varphi(1.2) = -21.8$, $\underline{v} = -21.8$. Vi får subgradient $\xi = 18 > 0$, lösningen ej tillåten, ingen övre gräns.

$\bar{u} = 0.5$ ger $\varphi(0.5) = \min 0.5x_1 + 0.5x_2 - 0.5x_3 - 4x_4 + x5 + 1.5x_6 - 17.5$ då $x_2, x_3, x_4, x_5 \in \{0,1\}$,
vilket har lösningen $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 1$, $x_5 = 0$, $x_6 = 0$, och $\varphi(1.4) = -22$, vilket inte ger en bättre undre gräns. Vi får subgradient $\xi = -12 < 0$, lösningen tillåten, ger övre gräns -16.

Bästa gränser: $-21.8 \leq v^* \leq -16$. Gränserna visar inte att vi har funnit optimum.

2c: Vi vill alltså att minimering av $(7u-3)x_1 + (11u-5)x_2 + (13u-7)x_3 + (10u-9)x_4 + (12u-5)x_5 + (15u-6)x_6$ ska ge lösningen $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$, $x_5 = 1.$, $x_6 = 0$. Detta kräver att $(7u-3) \geq 0$, $(11u-5) \leq 0$, $(13u-7) \geq 0$, $(10u-9) \leq 0$, $(12u-5) \leq 0$, $(15u-6) \geq 0$, dvs. $u \geq 3/7$, $u \leq 5/11$, $u \geq 7/13$, $u \leq 9/10$, $u \leq 5/12$ och $u \geq 6/15$, vilket saknar lösning (ty $7/13 > 5/12$). Vi har alltså inte styrbarhet.

Uppgift 3

3a: Dantzig-Wolfe: Subproblemet återfinnes ovan (men med $0 \leq x \leq 1$ istället för $x \in \{0,1\}$, vilket inte gör någon skillnad). Masterproblemet blir

$$
\begin{array}{ll}
\max & q \\
\text{då} & q \leq -3x_1^{(l)} - 5x_2^{(l)} - 7x_3^{(l)} - 9x_4^{(l)} - 5x_5^{(l)} - 6x_6^{(l)} \\
& \qquad +u(7x_1^{(l)} + 11x_2^{(l)} + 13x_3^{(l)} + 10x_4^{(l)} + 12x_5^{(l)} + 15x_6^{(l)} - 35) \text{ för alla } l \\
& u \geq 0
\end{array}
$$

Metoden itererar mellan subproblemet och masterproblemet. Subproblemet löses för givna värden på u, och ger en undre gräns, $\varphi(\bar{u})$, samt en ny lösning, $x^{(l)}$, till masterproblemet. Masterproblemet löses med alla kända $x^{(l)}$, och ger en övre gräns, samt nytt $\bar{u}$ till subproblemet. Metoden avslutas då den undre gränsen är lika med den övre. Då läser man ut den duala lösningen, λ, till masterproblemet, och skapar den optimala lösningen som $\sum_l \lambda_l x^{(l)}$.

3b: Punkten (1, 1, 1, 1, 1, 1) ger snitt: $q \leq -35 + 33u$.
Punkten (1, 1, 1, 1, 1, 0) ger snitt: $q \leq -29 + 18u$.
Punkten (0, 0, 1, 1, 0, 0) ger snitt: $q \leq -16 - 12u$.

Masterproblemet blir alltså

$$
\begin{array}{rrll}
v_{DM} = \max & q & & \\
\text{då} & q \leq & -35 + 33u & (1) \\
& q \leq & -29 + 18u & (2) \\
& q \leq & -16 - 12u & (3) \\
& u \geq & 0 &
\end{array}
$$

Grafisk lösning visar att snitt 2 och 3 är aktiva i minimum, som fås i $u = 13/30 \approx 0.43$, med $q = -21.2$. Vi får alltså $\bar{v} = v_{DM} = -21.2$. Vi har tidigare fått $\underline{v} = -21.8$, så vi löser subproblemet med $u = 13/30$.

$\bar{u} = 0.43333$ ger $\varphi(0.43333) = \min 0.0333x_1 - 0.2333x_2 - 1.3666x_3 - 4.6666x4 + 0.2x_5 + 0.5x_6 - 15.1666$ då $x_2, x_3, x_4, x_5 \in \{0, 1\}$,
vilket har lösningen $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 1$, $x_5 = 0$, $x_6 = 0$, och $\varphi(1.2) = -21.43$, $\underline{v} = -21.43$. Vi får subgradient $\xi = -1 < 0$, lösningen tillåten, övre gräns -21, ej bättre.

Punkten (0, 1, 1, 1, 0, 0) ger snitt: $q \leq -21 - u$. Masterproblemet blir nu

$$
\begin{array}{rrll}
v_{DM} = \max & q & & \\
\text{då} & q \leq & -35 + 33u & (1) \\
& q \leq & -29 + 18u & (2) \\
& q \leq & -16 - 12u & (3) \\
& q \leq & -21 - u & (4) \\
& u \geq & 0 &
\end{array}
$$

Grafisk lösning visar att snitt 2 och 4 är aktiva i mimimum, som fås i $u = 8/19 \approx 0.421$, med $q = -21.421$. Vi får alltså $\bar{v} = v_{DM} = -21.421$, att jämföra med $\underline{v} = -21.43$. Bra nog.

LP-dualen av masterproblemet blir

$$
\begin{array}{ll}
v_{DM} = \min & -35\lambda_1 - 29\lambda_2 - 16\lambda_3 - 21\lambda_4 \\
\text{då} & -33\lambda_1 - 18\lambda_2 + 12\lambda_3 + \lambda_4 \geq 0 \\
& \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1 \\
& \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \geq 0
\end{array}
$$

Komplementaritet ger $\lambda_1 = 0$ och $\lambda_3 = 0$ (eftersom dessa snitt inte är aktiva) samt $-18\lambda_2 + \lambda_4 = 0$ (eftersom $u > 0$), dvs. $\lambda_4 = 18\lambda_2$. Tillsammans med $\lambda_2 + \lambda_4 = 1$ ger detta $\lambda_2 = 1/19$ och $\lambda_4 = 18/19$.

Den optimala primala lösningen blir $x = \lambda_2 x^{(2)} + \lambda_4 x^{(4)} =$
$((1,1,1,1,1,0) + 18(0,1,1,1,0,0))/19 = (1/19, 1, 1, 1/19, 0)$.
(Extrakoll: Insättning ger att bivillkoret är uppfyllt med likhet.) Lösning av LP-problemet (via LP-dualen) ger samma lösning.

Uppgift 4

4a: Subproblemet (för fixerat y):

$$
\begin{array}{lrcrcrcll}
\psi(\bar{y}) = & \min \;\; -2x_1 & - & 3x_2 & - & 10x_3 & + & 100\bar{y} & \\
& \text{då} \quad x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & \leq & 20 + 30\bar{y} & (1) \\
& & & x_2 & + & x_3 & \leq & 1 + 14\bar{y} & (2) \\
& x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

LP-dualen av subproblemet:

$$
\begin{array}{llcl}
\psi(\bar{y}) = \max & (-20 - 30\bar{y})u_1 + (-1 - 14\bar{y})u_2 + 100\bar{y} & & \\
\text{då} & -u_1 & \leq & -2 \\
& -2u_1 - u_2 & \leq & -3 \\
& -3u_1 - u_2 & \leq & -10 \\
& u_1, u_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

De duala bivillkoren kan skrivas $U = \{u : u_1 \geq 2, 2u_1 + u_2 \geq 3, 3u_1 + u_2 \geq 10, u_2 \geq 0\}$.

Benders masterproblem:

$$
\begin{array}{ll}
\min & q \\
\text{då} & q \geq (100 - 30u_1^{(l)} - 14u_2^{(l)})y - 20u_1^{(l)} - u_2^{(l)} \quad \text{för alla } l \\
& y \in \{0,1,2,3,4,5\}
\end{array}
$$

Metoden itererar mellan subproblemet och masterproblemet. Subproblemet löses för givna värden på y, och ger en övre gräns, $h(\bar{y})$, samt en ny lösning, $u^{(l)}$, till masterproblemet. Masterproblemet löses med alla kända $u^{(l)}$, och ger en undre gräns, samt nya $\bar{y}$ till subproblemet. Metoden avslutas då den undre gränsen är lika med den övre.

4b: För $\bar{y} = 0$: $\psi(\bar{y}) = \max -20u_1 - u_2$ då $u \in U$.
Lösningen är $u_1 = 2$, $u_2 = 4$ med med $\psi(\bar{y}) = -44$, vilket ger $\bar{v} = -44$. Benderssnittet blir $q \geq -16y - 44$.

Benders masterproblem:

$$
\begin{array}{ll}
\min & q \\
\text{då} & q \geq -16y - 44 \\
& y \in \{0,1,2,3,4,5\}
\end{array}
$$

Den bästa lösningen är $y = 5$ med $q = -124$. Vi har nu $-124 \leq v^* \leq -44$.

För $\bar{y} = 5$: $\psi(\bar{y}) = \max -170u_1 - 71u_2 + 500$ då $u \in U$.
Lösningen är $u_1 = 10/3$, $u_2 = 0$ med med $\psi(\bar{y}) = -1700/3 \approx -66.67$, vilket ger $\bar{v} = -66.67$. Benderssnittet blir $q \geq -200/3 \approx -66.67$.

Benders masterproblem:

$$\begin{array}{ll} \min & q \\ \text{då} & q \geq -16y - 44 \\ & q \geq -66.67 \\ & y \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} \end{array}$$

Den bästa lösningen är $y = 2$ med $q = -66.67$. Vi har nu $-66.67 \leq v^* \leq -66.67$, vilket visar att optimum är uppnått.

Komplementaritet för subproblemet ger $x_1 = 0$ och $x_2 = 0$ samt $x_3 = 80/3 \approx 26.67$.

Den optimala lösningen är alltså $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 26.67$ samt $y = 2$, med $v^* = -66.67$. Svar i ord: Hyr 2 sherpas, och ta med 26.67 enheter av bagagetyp 3.

4c: Det tillåtna området till dualen av subproblemet har två extrempunkter. Man kan se att subproblemet aldrig kommer att sakna lösning, oavsett hur vi fixerar y, så LP-dualen kommer aldrig att få obegränsad lösning, dvs. extremriktningarna i dualen ger inga snitt. Det betyder att det fullständiga masterproblemet har två snitt.

Uppgift 5

5a: En bil: Noderna 1, 2, 5 och 6 har udda valens. Dubblering av bågarna (1,2) och (5,6) är billigaste sättet att ge alla noder jämn valens. Kostnaden för turen blir $57 + 9 = 66$. Tiden blir 66, och fasta kostnaden 10. Målfunktionsvärdet blir då $66 + 10 + 66 = 142$.

5b: Två bilar: (Att sikta på: Kommer varje tur i närheten av $66/2 = 33$ är det bra. Vi har redan fyra noder med udda valens. Försök att inte skapa flera för någon bil.)
Förslag på uppdelning:
Bil 1: Tur 1-4-5-6-4-7-5-6-1. Kostnad: 39. Tid: 39.
Bil 2: Tur 1-2-3-4-2-4-1. Kostnad: 34. Tid: 34.
Fast kostnad: 20. Maxtid: 39. Målfunktionsvärdet blir nu $39 + 34 + 20 + 39 = 132$.

5c: Tre bilar: (Sikta på $66/3 = 22$ för varje bil.) Troligt bra uppdelning:
Bil 1: Tur 4-7-5-6-5-4. Kostnad: 23. Tid: 23.
Bil 2: Tur 1-4-6-1-2-1. Kostnad: 26. Tid: 26.
Bil 3: Tur 2-3-4-2. Kostnad: 17. Tid: 17.
Fast kostnad: 30. Maxtid: 26. Målfunktionsvärdet blir nu $23+26+17+30+26 = 122$.

5d: Totala kostnaden blir lägst för tre bilar. (Uppdelningen är inte säkert den bästa, så lösningen är inte säkert optimal.)

5e: Kostnader utan fast kostnad: 132, 112, 92.
Kostnader med fast kostnad f: $132 + f$, $112 + 2f$, $92 + 3f$.
Två bilar är bäst om $112 + 2f \leq 132 + f$ och $112 + 2f \leq 92 + 3f$, vilket ger $f \leq 20$ och $f \geq 20$. Det kan bara hända om $f = 20$, men då är alla tre alternativen lika bra, och kostar 152.