Tekniska Högskolan i Linköping
Matematiska Institutionen
Optimeringslära
Kaj Holmberg

Optimering av realistiska sammansatta system
Lösning till tentamen
2019-01-18

Lösningar/svar

Uppgift 1

1a: Variabeldefinition: $x_j = 1$ om sak j tas med, 0 om inte.

max $z = 8x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 9x_4 + 4x_5 + 5x_6 + 15x_7$
då $12x_1 + 12x_2 + 20x_3 + 3x_4 + 5x_5 + 8x_6 + 40x_7 \leq 70$
$x_j \in \{0, 1\}$ för $j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

1b: Indata: c_k : värde, a_k : vikt.
Definitioner:
Tillstånd: $s_k =$ den vikt (kg) som får användas till de k första sakerna.
Styrning: $x_k = 1$ om sak k tas med, 0 om inte.
Överföringsfunktion: $s_{k-1} = s_k - a_k x_k$.
Målfunktion: $f_k(s_k) = \max_{x_k}(c_k x_k + f_{k-1}(s_{k-1}))$.
$0 \leq s_k \leq 70$ för alla k. $s_0 \geq 0$, $s_7 = 70$. $f_0(s_0) = 0$.

(Om vi räknar s_k i enheter om 10 kg, blir $0 \leq s_k \leq 7$ för alla k. $s_7 = 7$.)

1c: Efter avrundning fås problemet

max $z = 8x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 9x_4 + 4x_5 + 5x_6 + 15x_7$
då $x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 + x_6 + 4x_7 \leq 7$
$x_j \in \{0, 1\}$ för $j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

Iteration 1:

$x_1 \setminus s_1$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	-	8	8	8	8	8	8	8
$f_1(s_1)$	0	8	8	8	8	8	8	8
$\hat{x}_1(s_1)$	0	1	1	1	1	1	1	1

Iteration 2:

$x_2 \setminus s_2$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	8	8	8	8	8	8	8
1	-	5	13	13	13	13	13	13
$f_2(s_2)$	0	8	13	13	13	13	13	13
$\hat{x}_2(s_2)$	0	0	1	1	1	1	1	1

Iteration 3:

$x_3 \setminus s_3$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	8	13	13	13	13	13	13
1	-	-	7	15	20	20	20	20
$f_3(s_3)$	0	8	13	15	20	20	20	20
$\hat{x}_3(s_3)$	0	0	0	1	1	1	1	1

Iteration 4:

$x_4 \setminus s_4$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	8	13	15	20	20	20	20
1	9	17	22	24	29	29	29	29
$f_4(s_4)$	9	17	22	24	29	29	29	29
$\hat{x}_4(s_4)$	1	1	1	1	1	1	1	1

Iteration 5:

$x_5 \setminus s_5$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	9	17	22	24	29	29	29	29
1	-	13	21	26	28	33	33	33
$f_5(s_5)$	9	17	22	26	29	33	33	33
$\hat{x}_5(s_5)$	0	0	0	1	0	1	1	1

Iteration 6:

$x_6 \setminus s_6$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	9	17	22	26	29	33	33	33
1	-	14	22	27	31	34	38	38
$f_6(s_6)$	9	17	22	27	31	34	38	38
$\hat{x}_5(s_5)$	0	0	0	1	1	1	1	1

Iteration 7:

$x_7 \diagdown s_7$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	9	17	22	27	31	34	38	38
1	-	-	-	-	24	32	37	42
$f_7(s_7)$	9	17	22	27	31	34	38	42
$\hat{x}_5(s_5)$	0	0	0	0	0	0	0	1

Uppnystning: $s_7 = 7$, $x_7 = 1$, $s_6 = 3$, $x_6 = 1$, $s_5 = 2$, $x_5 = 0$, $s_4 = 2$, $x_4 = 1$, $s_3 = 2$, $x_3 = 0$, $s_2 = 2$, $x_2 = 1$, $s_1 = 1$, $x_1 = 1$, $s_0 = 0$. $z = 42$.
Svar i ord: Ta med sak 1, 2, 4, 6 och 7, dvs. bord 1 och 2, svart tavla, banner och kakor. Totalt värde: 42.

1d: Lösningen (1 1 0 1 0 1 1) väger 75 kg, vilket är mer än 70 kg, så den är inte tillåten. När man löser LP-relaxationen av ett kappsäcksproblem, väljer man $\max(c_j/a_j)$ för att hitta bästa variabeln att öka. Här kan vi använda motsatt kriterium, $\min(c_j/a_j)$, för att hitta den sämsta av de som är med, och ta bort den. Vi får minsta kvoten $15/4/ = 0.375$ för x_7, men utan kakor har man ju inget att sälja, och då blir resan meningslös. Därför låter jag kakorna vara kvar. Näst minsta kvot blir $5/12 \approx 0.4167$ för x_2, så vi tar bort sak 2 (bord 2) ur lösningen. Nu får vi lösningen (1 0 0 1 0 1 1), vilken väger 63 kg, vilket är mindre än 70 kg, så lösningen är tillåten. Målfunktionsvärdet är nu 37.

Om man fortsätter att fundera, ser man nu att det finns plats för sak 5 (flaggan), så om vi tar med den fås en tillåten lösning med vikt 68 kg och värde 41.

(Även andra någorlunda metodiska förändringar av lösningen är acceptabla.)

1e: Använd kolumnen med $s_k = 6$ i uppgift c. Nysta upp: $s_7 = 6$, $x_7 = 0$, $s_6 = 6$, $x_6 = 1$, $s_5 = 5$, $x_5 = 1$, $s_4 = 4$, $x_4 = 1$, $s_3 = 4$, $x_3 = 1$, $s_2 = 2$, $x_2 = 1$, $s_1 = 1$, $x_1 = 1$, $s_0 = 0$. $z = 38$.
Svar i ord: Ta med allt utom kakorna. Totalt värde: 38. Denna lösning väger 60 kg, vilket är tillåtet. Dock kan man fundera på om inte kakorna måste vara med.

Om så är fallet, bör vi fixera x_7 till 1, vilket ger en kvarvarande kappsäck på 20 kg. Uppnystning från iteration 6 bakåt ger följande. $s_7 = 6$, $x_7 = 1$, $s_6 = 2$, $x_6 = 0$, $s_5 = 2$, $x_5 = 0$, $s_4 = 2$, $x_4 = 1$, $s_3 = 2$, $x_3 = 0$, $s_2 = 2$, $x_2 = 1$, $s_1 = 1$, $x_1 = 1$, $s_0 = 0$. $z = 37$.
Svar i ord: Ta med sak 1, 2, 4 och 7. Totalt värde: 37. Denna lösning väger dock mer 60 kg, vilket inte är tillåtet. Med samma motivering som i uppgift d, tas sak 2 bort, vilket ger lösningen: Ta med sak 1, 4 och 7, dvs. bord 1, svart tavla samt kakor, med vikt 55 kg och värde 32. (Nu kan vi åter klämma in sak 5, vilket ger vikt 60 kg och värde 36.)

Uppgift 2

2a: Subproblem (Lagrangerelaxation):

$\varphi(\bar{u}) = \min -8x_1 - 5x_2 - 7x_3 - 9x_4 - 4x_5 - 5x_6 - 15x_7 + u(12x_1 + 12x_2 + 20x_3 + 3x_4 + 5x_5 + 8x_6 + 40x_7 - 70) = (12u-8)x_1 + (12u-5)x_2 + (20u-7)x_3 + (3u-9)x_4 + (5u-4)x_5 + (8u-5)x_6 + (40u-15)x_7 - 70u$
då $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \in \{0, 1\}$

F.ö. se kurslitteraturen.

2b: $\bar{u} = 0$ ger $\varphi(0) = \min -8x_1 - 5x_2 - 7x_3 - 9x_4 - 4x_5 - 5x_6 - 15x_7$ då $x \in \{0, 1\}$, vilket har lösningen $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 1$, $x_5 = 1$, $x_6 = 1$, $x_7 = 1$, och $\varphi(0) = -53$, vilket ger $\underline{v} = -53$. Subgradient: $\xi = 30 > 0$ så lösningen är inte tillåten och ingen övre gräns fås.

$\bar{u} = 0.3$ ger $\varphi(0.3) = \min -4.4x_1 - 1.4x_2 - x_3 - 8.1x_4 - 2.5x_5 - 2.6x_6 - 3x_7 - 21$ då $x \in \{0, 1\}$, vilket har lösningen $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 1$, $x_5 = 1$, $x_6 = 1$, $x_7 = 1$, och $\varphi(0.3) = -44$, $\underline{v} = -44$. Vi får subgradient $\xi = 30 > 0$, lösningen ej tillåten, ingen övre gräns.

$\bar{u} = 0.4$ ger $\varphi(0.4) = \min -3.2x_1 - 0.2x_2 + x_3 - 7.8x_4 - 2x_5 - 1.8x_6 + x_7 - 28$ då $x \in \{0, 1\}$, vilket har lösningen $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$, $x_5 = 1$, $x_6 = 1$, $x_7 = 0$, och $\varphi(1.4) = -43$, en bättre undre gräns. $\underline{v} = -43$, Vi får subgradient $\xi = -30 < 0$, lösningen tillåten, ger övre gräns -31.

Bästa gränser: $-43 \leq v^* \leq -31$. Gränserna visar inte att vi har funnit optimum.

2c: Vi vill alltså att minimering av $(12u-8)x_1 + (12u-5)x_2 + (20u-7)x_3 + (3u-9)x_4 + (5u-4)x_5 + (8u-5)x_6 + (40u-15)x_7$ ska ge lösningen $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$, $x_5 = 1$, $x_6 = 1$, $x_7 = 1$. Detta kräver att $(12u - 8) \leq 0$, $(12u - 5) \geq 0$, $(20u - 7) \geq 0$, $(3u - 9) \leq 0$, $(5u - 4) \leq 0$, $(8u - 5) \leq 0$, $(40u - 15) \leq 0$, dvs. $u \geq 2/3$, $u \leq 1/6$, $u \geq 7/20$, $u \leq 3$, $u \leq 4/5$ $u \leq 5/8$ och $u \leq 3/8$, vilket ger $u \geq 2/3$ och $u \leq 1/6$ vilket saknar lösning. Vi har alltså inte styrbarhet. (Att sätta $x_5 = 0$ ger samma slutsats.)

Uppgift 3

3a: Dantzig-Wolfe: Subproblemet återfinnes ovan (men med $0 \leq x \leq 1$ istället för $x \in \{0, 1\}$, vilket inte gör någon skillnad). Masterproblemet blir

$$\begin{array}{ll} \max & q \\ \text{då} & q \leq -8x_1^{(l)} - 5x_2^{(l)} - 7x_3^{(l)} - 9x_4^{(l)} - 4x_5^{(l)} - 5x_6^{(l)} - 15x_7^{(l)} + \\ & \qquad u(12x_1^{(l)} + 12x_2^{(l)} + 20x_3^{(l)} + 3x_4^{(l)} + 5x_5^{(l)} + 8x_6^{(l)} + 40x_7^{(l)} - 70) \;\; \text{för alla } l \\ & u \geq 0 \end{array}$$

Metoden itererar mellan subproblemet och masterproblemet. Subproblemet löses för givna värden på u, och ger en undre gräns, $\varphi(\bar{u})$, samt en ny lösning, $x^{(l)}$, till masterproblemet. Masterproblemet löses med alla kända $x^{(l)}$, och ger en övre gräns, samt nytt $\bar{u}$ till subproblemet. Metoden avslutas då den undre gränsen är lika med den övre. Då läser man ut den duala lösningen, λ, till masterproblemet, och skapar den optimala lösningen som $\sum_l \lambda_l x^{(l)}$.

3b: Punkten (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1) ger snitt: $q \leq -53 + 30u$.
Punkten (1, 1, 0, 1, 1, 1, 0) ger snitt: $q \leq -31 - 30u$.

Masterproblemet blir alltså

$$\begin{array}{rrll} v_{DM} = \max & q & & \\ \text{då} & q \leq & -53 + 30u & (1) \\ & q \leq & -31 - 30u & (2) \\ & u \geq & 0 & \end{array}$$

Uppenbarligen är snitt 1 och 2 aktiva i maximum, som fås i $u = 11/30 \approx 0.3667$, med $q = -42$. Vi får alltså $\bar{v} = v_{DM} = -42$. Vi har tidigare fått $\underline{v} = -43$, så vi löser subproblemet med $u = 11/30$.

$\bar{u} = 0.367$ ger $\varphi(0.367) = \min -3.6x_1 - 0.6x_2 + 0.333x_3 - 7.9x_4 - 2.167x_5 - 2.067x_6 - 0.333x_7 - 25.667$ då $0 \leq x \leq 1$, vilket har lösningen $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$, $x_5 = 1$, $x_6 = 1$, $x_7 = 1$, och $\varphi(0.3667) = -42.3333$, $\underline{v} = -42.3333$. Vi får subgradient $\xi = 10 > 0$, lösningen ej tillåten.

Punkten (1, 1, 0, 1, 1, 1, 1) ger snitt: $q \leq -46 + 10u$. Masterproblemet blir nu

$$
\begin{array}{rrll}
v_{DM} = \max & q & & \\
\text{då} & q \leq & -53 + 30u & (1) \\
& q \leq & -31 - 30u & (2) \\
& q \leq & -46 + 10u & (3) \\
& u \geq & 0 &
\end{array}
$$

Grafisk lösning visar att snitt 2 och 3 är aktiva i maximum, som fås i $u = 3/8 = 0.375$, med $q = -42.25$. Vi får alltså $\bar{v} = v_{DM} = -42.25$, att jämföra med $\underline{v} = -42.333$. Ganska bra.

LP-dualen av masterproblemet blir

$$
\begin{array}{ll}
v_{DM} = \min & -53\lambda_1 - 31\lambda_2 - 46\lambda_3 \\
\text{då} & -30\lambda_1 + 30\lambda_2 - 10\lambda_3 \geq 0 \\
& \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \\
& \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0
\end{array}
$$

Komplementaritet ger $\lambda_1 = 0$ (eftersom detta snitt inte är aktivt) samt $30\lambda_2 - 10\lambda_3 = 0$ (eftersom $u > 0$), dvs. $\lambda_3 = 3\lambda_2$. Tillsammans med $\lambda_2 + \lambda_3 = 1$ ger detta $\lambda_2 = 1/4$ och $\lambda_3 = 3/4$.

Den optimala primala lösningen blir $x = \lambda_2 x^{(2)} + \lambda_3 x^{(3)} =$
$((1,1,0,1,1,1,0) + 3(1,1,0,1,1,1,1))/4 = (1,1,0,1,1,1,3/4)$.
(Extrakoll: Insättning ger att bivillkoret är uppfyllt med likhet.) Lösning av LP-problemet (via LP-dualen) ger samma lösning.

Uppgift 4

4a: Subproblemet (för fixerat y):

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrl}
\psi(\bar{y}) = & \min & -4x_1 & - & 3x_2 & - & 5x_3 & +15\bar{y}_1 + 20\bar{y}_2 & & \\
\text{då} & & x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & \leq & 20 + 10\bar{y}_1 + 8\bar{y}_2 & (1) \\
& & & & x_2 & + & x_3 & \leq & 10 + 7\bar{y}_1 + 8\bar{y}_2 & (2) \\
& & x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

LP-dualen av subproblemet:

$$
\begin{array}{rl}
\psi(\bar{y}) = \max & (-20 - 10\bar{y}_1 - 8\bar{y}_2)u_1 + (-10 - 7\bar{y}_1 - 8\bar{y}_2)u_2 + 15\bar{y}_1 + 20\bar{y}_2 \\
\text{då} & -u_1 \leq -4 \\
& -2u_1 - u_2 \leq -3 \\
& -u_1 - u_2 \leq -5 \\
& u_1, u_2 \geq 0
\end{array}
$$

De duala bivillkoren kan skrivas $U = \{u : u_1 \geq 4, 2u_1 + u_2 \geq 3, u_1 + u_2 \geq 5, u_2 \geq 0\}$.

Benders masterproblem:

$$\begin{array}{ll} \min & q \\ \text{då} & q \geq (15 - 10u_1^{(l)} - 7u_2^{(l)})y_1 + (20 - 8u_1^{(l)} - 8u_2^{(l)})y_2 - 20u_1^{(l)} - 10u_2^{(l)} \quad \text{för alla } l \\ & y_1, y_2 \in \{0, 1\} \end{array}$$

Metoden itererar mellan subproblemet och masterproblemet. Subproblemet löses för givna värden på y, och ger en övre gräns, $h(\bar{y})$, samt en ny lösning, $u^{(l)}$, till masterproblemet. Masterproblemet löses med alla kända $u^{(l)}$, och ger en undre gräns, samt nya $\bar{y}$ till subproblemet. Metoden avslutas då den undre gränsen är lika med den övre.

4b: För $\bar{y}_1 = 0$ och $\bar{y}_2 = 0$: $\psi(\bar{y}) = \max -20u_1 - 10u_2$ då $u \in U$.
Lösningen är $u_1 = 4$, $u_2 = 1$ med med $\psi(\bar{y}) = -90$, vilket ger $\bar{v} = -90$. Benderssnittet blir $q \geq -32y_1 - 20y_2 - 90$.

Benders masterproblem:

$$\begin{array}{ll} \min & q \\ \text{då} & q \geq -32y_1 - 20y_2 - 90 \\ & y_1, y_2 \in \{0, 1\} \end{array}$$

Den bästa lösningen är $y_1 = 1$, $y_2 = 1$ med $q = -142$. Vi har nu $-162 \leq v^* \leq -90$.

För $\bar{y}_1 = 1$ och $\bar{y}_2 = 1$: $\psi(\bar{y}) = \max -38u_1 - 25u_2 + 35$ då $u \in U$.
Lösningen är $u_1 = 4$, $u_2 = 1$ med med $\psi(\bar{y}) = -142$, vilket ger $\bar{v} = -142$. Vi har nu $-142 \leq v^* \leq -142$, vilket visar att optimum är uppnått.

Komplementaritet för subproblemet ger $x_2 = 0$ samt att båda primala bivillkoren ska vara uppfyllda med likhet, vilket ger $x_3 = 25$ och $x_1 = 13$.

Den optimala lösningen är alltså $x_1 = 13$, $x_2 = 0$, $x_3 = 25$ samt $y_1 = 1$ och $y_2 = 1$, med $v^* = -142$. Svar i ord: Ta med båda.

Uppgift 5

5a: I varje iteration genereras en ny extrempunkt till det konstanta tillåtna området till subproblemet, och det finns bara ändligt många.

5b: I varje iteration genereras en ny extrempunkt till det konstanta duala tillåtna området till subproblemet, och det finns bara ändligt många.

5c: Subproblemet har bristande styrbarhet, så optimum kanske inte är en extrempunkt i subproblemet, och kanske därför aldrig fås.

Uppgift 6

6a: En person: Noderna 2, 3, 4, 5, 6, 7 har udda valens. Dubblering av bågarna (2,5), (3,6) och (4,7) är billigaste sättet att ge alla noder jämn valens. Kostnaden för turen blir $76 + 18 = 94$. Tiden blir 94, och fasta kostnaden 100. Målfunktionsvärdet blir då $94 + 100 + 94 = 288$.

6b: Två personer: Förslag på uppdelning:
Person 1: Tur 1-2-5-4-7-4-1. Kostnad: 43. Tid: 43.
Person 2: Tur 8-3-2-5-6-3-6-8. Kostnad: 51. Tid: 51.
Fast kostnad: 200. Maxtid: 51. Målfunktionsvärdet blir nu $43 + 51 + 200 + 51 = 345$.

6c: Tre personer: Förslag på uppdelning:
Person 1: Tur 1-2-5-4-7-4-1. Kostnad: 43. Tid: 43.
Person 2: Tur 2-3-5-6-2. Kostnad: 30. Tid: 30.
Person 3: Tur 3-8-6-3. Kostnad: 21. Tid: 21.
Fast kostnad: 300. Maxtid: 43. Målfunktionsvärdet blir nu 43+30+21+300+43 = 437.

6d: Totala kostnaden blir lägst för en person.

6e: Inför nod 1a med endast en båge till nod 1. Bestäm att varje person måste täcka båge (1,1a).

Uppgift 7

7a: Lagrangerelaxationen: $\varphi(u) = \min_x \sum_{j=1}^{n}(x_j - dr_j)^2 + u(\sum_{j=1}^{n} x_j - m)$.
För $u = 0$ fås, för varje j, $\varphi_j(0) = \min_{x_j}(x_j - dr_j)^2$, som har optimum för x_j i det heltal som ligger närmast dr_j. Det blir $x_1 = 70$, $x_2 = 31$, $x_3 = 19$, $x_4 = 22$, $x_5 = 100$, $x_6 = 28$, $x_7 = 16$, $x_8 = 62$, med $\varphi(0) = 0.302^2 + 0.492^2 + 0.456^2 + 0.407^2 + 0.164^2 + 0.371^2 + 0.355^2 + 0.145^2 = 1.0184$. Detta ger en undre gräns på 1.0184.

En subgradient fås genom att stoppa in lösningen i det relaxerade bivillkoret, vilket ger $\xi = 70 + 31 + 19 + 22 + 100 + 28 + 16 + 62 - 349 = -1$. Detta betyder att vi delat ut ett mandat för lite, och måste minska u lite, för att öka vänsterledet i bivillkoret.

7b: Nu måste vi finna minimum till $(x_j - dr_j)^2 + ux_j$ för varje j. Den kontinuerliga lösningen blir $x_j^C = dr_j - u/2$. Eftersom målfunktionen är konvex, måste heltalsminimum ligga i en av de två närliggande heltalspunkterna, så vi evaluerar båda och tar den bästa av den, dvs. finn $\min(\lfloor dr_j - u/2 \rfloor, \lfloor dr_j - u/2 \rfloor + 1)$. Det innebär bara att löpa igenom alla variablerna en gång, vilket är effektivt. (Det är separabiliteten som gör att det blir så lätt.)

Uppgift 8

Modell:
$\min 7x_{12} + 8x_{14} + 11x_{23} + 8x_{25} + 5x_{36} + 5x_{38} + 10x_{45} + 5x_{47} + 6x_{56} + 11x_{68}$
då $x_{25} + x_{45} + x_{56} = 3$, $x \in T$.

Lagrangerelaxation:
$\varphi(u) = \min_{x \in T} 7x_{12} + 8x_{14} + 11x_{23} + 8x_{25} + 5x_{36} + 5x_{38} + 10x_{45} + 5x_{47} + 6x_{56} + 11x_{68} + u(x_{25} + x_{45} + x_{56} - 3) =$
$\min_{x \in T} 7x_{12}+8x_{14}+11x_{23}+(8+u)x_{25}+5x_{36}+5x_{38}+(10+u)x_{45}+5x_{47}+(6+u)x_{56}+11x_{68}-3u$
Dvs. addera u till kostnaderna på alla bågar som går till nod 5. (Om det i praktiken är ett $\geq$-villkor, kommer vi att få $u < 0$.)

För $u = 0$ fås ursprungskostnaderna. Lös med Kruskals eller Prims metod. Optimallösning: alla bågar utom (2,3), (4,5) och (6,8), med kostnad 44, dvs. $\varphi(0) = 44$, så $\underline{v} = 44$. $\xi = x_{25} + x_{45} + x_{56} - 3 = -1 < 0$, så lösningen är inte tillåten.

Vi behöver minska u, vilket kommer att minska bågkostnaderna på bågar till nod 5. Bågarna (2,5), (4,5) och (5,6) blir billigare. Eftersom (2,5) och (5,6) redan är med i lösningen, ändras inte det. Den enda ändring som kan hända är att båge (4,5) kommer med. Vi ser nu att båge (4,5) bildar cykeln 4-5-2-1-4 tillsammans med bågar som redan ingår i lösningen. För att båge (4,5) ska komma med i billigaste trädet, måste den bli billigare än någon annan båge i cykeln. Eftersom kostnaden på båge (2,5) också minskas, är det bara bågarna (1,2) och (1,4) som kan bli dyrare. Vi kräver därför att $10 + u \leq 7$ eller $10 + u \leq 8$, och för $u = -2$ uppfylls det andra av dessa krav.

Vi sätter därför $u = -2$ (och ser till att vi tar båge (4,5) och inte (1,4), då dessa är lika dyra).

Alltså, minska kostnaderna på bågarna (2,5), (4,5) och (5,6) med 2, och lös om. Optimallösning blir samma som förut, men med båge (1,4) ersatt av (4,5). Kostnaden blir 40. dvs. $\varphi(-2) = 40+6 = 46$, så $\underline{v} = 46$. Vi får $\xi = x_{25} + x_{45} + x_{56} - 3 = 0$, så lösningen är tillåten. Då får vi övre gräns $\bar{v} = 46$, och har funnit optimum och kan sluta.