Tekniska Högskolan i Linköping
Matematiska Institutionen
Optimeringslära
Kaj Holmberg

Optimering av realistiska sammansatta system
Lösning till tentamen
2019-04-24

Lösningar/svar

Uppgift 1

1a: Variabeldefinition: $x_j = 1$ om sak j tas med, 0 om inte.

max $z = 10x_1 + 8x_2 + 7x_3 + 4x_4 + 6x_5 + 5x_6$
då $3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 + 2x_5 + 4x_6 \leq 8$
$x_j \in \{0, 1\}$ för $j = 1, 2, 3, 4, 5$

1b: Indata: c_k : värde, a_k : vikt.
Definitioner:
Tillstånd: $s_k =$ den vikt (kg) som får användas till de k första sakerna.
Styrning: $x_k = 1$ om sak k tas med, 0 om inte.
Överföringsfunktion: $s_{k-1} = s_k - a_k x_k$.
Målfunktion: $f_k(s_k) = \max_{x_k}(c_k x_k + f_{k-1}(s_{k-1}))$.
$0 \leq s_k \leq 8$ för alla k. $s_0 \geq 0$, $s_6 = 8$. $f_0(s_0) = 0$.

1c:

Iteration 1:

$x_1 \setminus s_1$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	-	-	-	10	10	10	10	10	10
$f_1(s_1)$	0	0	0	10	10	10	10	10	10
$\hat{x}_1(s_1)$	0	0	0	1	1	1	1	1	1

Iteration 2:

$x_2 \setminus s_2$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	0	0	10	10	10	10	10	10
1	-	-	-	-	8	8	8	18	18
$f_2(s_2)$	0	0	0	10	10	10	10	18	18
$\hat{x}_2(s_2)$	0	0	0	0	0	0	0	1	1

Iteration 3:

$x_3 \setminus s_3$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	0	0	10	10	10	10	18	18
1	-	-	7	7	7	17	17	17	17
$f_3(s_3)$	0	0	7	10	10	17	17	18	18
$\hat{x}_3(s_3)$	0	0	1	0	0	1	1	0	0

Iteration 4:

$x_4 \backslash s_4$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	0	7	10	10	17	17	18	18
1	-	4	4	11	14	14	21	21	22
$f_4(s_4)$	0	4	7	11	14	17	21	21	22
$\hat{x}_4(s_4)$	0	1	0	1	1	0	1	1	1

Iteration 5:

$x_5 \backslash s_5$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	4	7	11	14	17	21	21	22
1	-	-	6	10	13	17	20	23	27
$f_5(s_5)$	0	4	7	11	14	17	21	23	27
$\hat{x}_5(s_5)$	0	0	0	0	0	0	0	1	1

Iteration 6:

$x_6 \backslash s_6$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	4	7	11	14	17	21	23	27
1	-	-	-	-	5	9	12	16	19
$f_6(s_6)$	0	4	7	11	14	17	21	23	27
$\hat{x}_5(s_5)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Uppnystning: $s_6 = 8$, $x_6 = 0$, $s_5 = 8$, $x_5 = 1$, $s_4 = 6$, $x_4 = 1$, $s_3 = 5$, $x_3 = 1$, $s_2 = 3$, $x_2 = 0$, $s_1 = 3$, $x_1 = 1$, $s_0 = 0$. $z = 27$.
Svar i ord: Ta med sak 1, 3, 4 och 5, dvs. badkläder, extra skor, böcker och dator, men inte vandringskläder och finkläder. Totalt värde: 27.

1d: Använd kolumnen med $s_6 = 7$ i uppgift c. Nysta upp: $s_6 = 7$, $x_6 = 0$, $s_5 = 7$, $x_5 = 1$, $s_4 = 5$, $x_4 = 0$, $s_3 = 5$, $x_3 = 1$, $s_2 = 3$, $x_2 = 0$, $s_1 = 3$, $x_1 = 1$, $s_0 = 0$. $z = 23$.
Svar i ord: Skillnaden är att böckerna lämnas hemma. Totalt värde: 23.

Uppgift 2

2a: Subproblem (Lagrangerelaxation):

$\varphi(\bar{u}) = \min -10x_1 - 8x_2 - 7x_3 - 4x_4 - 6x_5 - 5x_6 + u(3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 + 2x_5 + 4x_6 - 7) =$
$(3u - 10)x_1 + (4u - 8)x_2 + (2u - 7)x_3 + (u - 4)x_4 + (2u - 6)x_5 + (4u - 5)x_6 - 7u$
då $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \in \{0, 1\}$

F.ö. se kurslitteraturen.

2b: $\bar{u} = 0$ ger $\varphi(0) = \min -10x_1 - 8x_2 - 7x_3 - 4x_4 - 6x_5 - 5x_6$ då $x \in \{0, 1\}$, vilket har lösningen $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 1$, $x_5 = 1$, $x_6 = 1$, och $\varphi(0) = -40$, vilket ger $\underline{v} = -40$. Subgradient: $\xi = 9 > 0$ så lösningen är inte tillåten och ingen övre gräns fås.

$\bar{u} = 1$ ger $\varphi(1) = \min -7x_1 - 4x_2 - 5x_3 - 3x_4 - 4x_5 - x6 - 7$ då $x \in \{0, 1\}$, vilket har lösningen $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 1$, $x_5 = 1$, $x_6 = 1$, och $\varphi(1) = -31$, $\underline{v} = -31$. Vi får subgradient $\xi = 9 > 0$, lösningen ej tillåten, ingen övre gräns.

$\bar{u} = 2$ ger $\varphi(2) = \min -4x_1 - 3x_3 - 2x_4 - 2x_5 + 3x_6 - 14$ då $x \in \{0, 1\}$, vilket har lösningen $x_1 = 1$, $x_2 = 0$ (eller 1), $x_3 = 1$, $x_4 = 1$, $x_5 = 1$, $x_6 = 0$, och $\varphi(2) = -25$, en bättre undre gräns, $\underline{v} = -25$. Vi får subgradient $\xi = 1 > 0$, lösningen ej tillåten, ingen övre gräns.

$\bar{u} = 3$ ger $\varphi(3) = \min -x_1 + 4x_2 - x_3 - x_4 + 7x_6 - 21$ då $x \in \{0, 1\}$, vilket har lösningen $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 1$, $x_5 = 0$ (eller 1), $x_6 = 0$, och $\varphi(3) = -24$, en bättre undre gräns, $\underline{v} = -24$. Vi får subgradient $\xi = -1 < 0$, lösningen tillåten, ger övre gräns -21. (Om vi hade satt $x_5 = 1$, hade vi fått $\xi = 1 > 0$.)

Bästa gränser: $-24 \leq v^* \leq -21$. Gränserna visar inte att vi har funnit optimum.

2c: Vi vill alltså att minimering av $(3u-10)x_1 + (4u-8)x_2 + (2u-7)x_3 + (u-4)x_4 + (2u-6)x_5 + (4u-5)x_6$ ska ge lösningen $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 0$, $x_5 = 1$, $x_6 = 0$- Detta kräver att $(3u - 10) \leq 0$, $(4u - 8) \geq 0$, $(2u - 7) \leq 0$, $(u - 4) \geq 0$, $(2u - 6) \leq 0$, $(4u - 5) \geq 0$, dvs. $u \leq 10/3$, $u \geq 2$, $u \leq 7/2$, $u \geq 4$, $u \leq 3$, $u \geq 5/4$, vilket ger $u \geq 4$ och $u \leq 3$ vilket saknar lösning. Vi har alltså inte styrbarhet.

Uppgift 3

3a: Dantzig-Wolfe: Subproblemet återfinnes ovan (men med $0 \leq x \leq 1$ istället för $x \in \{0, 1\}$, vilket inte gör någon skillnad). Masterproblemet blir

$$\begin{array}{ll} \max & q \\ \text{då} & q \leq -10x_1^{(l)} - 8x_2^{(l)} - 7x_3^{(l)} - 4x_4^{(l)} - 6x_5^{(l)} - 5x_6^{(l)} + \\ & \qquad u(3x_1^{(l)} + 4x_2^{(l)} + 2x_3^{(l)} + x_4^{(l)} + 2x_5^{(l)} + 84_6^{(l)} - 7) \text{ för alla } l \\ & u \geq 0 \end{array}$$

Metoden itererar mellan subproblemet och masterproblemet. Subproblemet löses för givna värden på u, och ger en undre gräns, $\varphi(\bar{u})$, samt en ny lösning, $x^{(l)}$, till masterproblemet. Masterproblemet löses med alla kända $x^{(l)}$, och ger en övre gräns, samt nytt $\bar{u}$ till subproblemet. Metoden avslutas då den undre gränsen är lika med den övre. Då läser man ut den duala lösningen, λ, till masterproblemet, och skapar den optimala lösningen som $\sum_l \lambda_l x^{(l)}$.

3b: Punkten (1, 1, 1, 1, 1, 1) ger snitt: $q \leq -40 + 9u$.
Punkten (1, 0, 1, 1, 1, 0) ger snitt: $q \leq -27 + u$.
Punkten (1, 0, 1, 1, 0, 0) ger snitt: $q \leq -21 - u$.

Masterproblemet blir alltså

$$\begin{array}{rlll} v_{DM} = \max & q & & \\ \text{då} & q \leq & -40 + 9u & (1) \\ & q \leq & -27 + u & (2) \\ & q \leq & -21 - u & (3) \\ & u \geq & 0 & \end{array}$$

Snitt 2 och 3 är aktiva i maximum, som fås i $u = 3$, med $q = -24$. Vi får alltså $\bar{v} = v_{DM} = -24$. Vi har tidigare fått $\underline{v} = -24$, så vi behöver inte lösa något mer subproblem.

LP-dualen av masterproblemet blir

$$\begin{array}{ll} v_{DM} = \min & -40\lambda_1 - 27\lambda_2 - 21\lambda_3 \\ \text{då} & -9\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 \geq 0 \\ & \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \\ & \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0 \end{array}$$

Komplementaritet ger $\lambda_1 = 0$ (eftersom detta snitt inte är aktivt) samt $-\lambda_2 + \lambda_3 = 0$ (eftersom $u > 0$), dvs. $\lambda_3 = \lambda_2$. Tillsammans med $\lambda_2 + \lambda_3 = 1$ ger detta $\lambda_2 = 0.5$ och $\lambda_3 = 0.5$.

Den optimala primala lösningen blir $x = \lambda_2 x^{(2)} + \lambda_3 x^{(3)} =$
$0.5(1, 0, 1, 1, 1, 0) + 0.5(1, 0, 1, 1, 0, 0) = (1, 0, 1, 1, 0.5, 0)$.
(Extrakoll: Insättning ger att bivillkoret är uppfyllt med likhet.) Lösning av LP-problemet (via LP-dualen) ger samma lösning.

Uppgift 4

4a: Subproblemet (för fixerat y):

$$\begin{array}{rlrcrcrcll}
\psi(\bar{y}) = & \min & -4x_1 & - & 3x_2 & - & x_3 & + & 20\bar{y} & \\
& \text{då} & x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & \leq & 7 + 20\bar{y} & (1) \\
& & 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & \leq & 4 & (2) \\
& & x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq & 0 &
\end{array}$$

LP-dualen av subproblemet:

$$\begin{array}{rlrcr}
\psi(\bar{y}) = & \max & (-7 - 20\bar{y})u_1 - 4u_2 + 20\bar{y} & & \\
& \text{då} & -u_1 - 2u_2 & \leq & -4 \\
& & -2u_1 - u_2 & \leq & -3 \\
& & -u_1 + u_2 & \leq & -1 \\
& & u_1, u_2 & \geq & 0
\end{array}$$

De duala bivillkoren kan skrivas $U = \{u : u_1 + 2u_2 \geq 4, 2u_1 + u_2 \geq 3, u_1 - u_2 \geq 1, u_1 \geq 0, u_2 \geq 0\}$.

Benders masterproblem:

$$\begin{array}{ll}
\min & q \\
\text{då} & q \geq (20 - 20u_1^{(l)})y - 7u_1^{(l)} - 4u_2^{(l)} \quad \text{för alla } l \\
& y \in \{0, 1, 2, 3\}
\end{array}$$

Metoden itererar mellan subproblemet och masterproblemet. Subproblemet löses för givna värden på y, och ger en övre gräns, $h(\bar{y})$, samt en ny lösning, $u^{(l)}$, till masterproblemet. Masterproblemet löses med alla kända $u^{(l)}$, och ger en undre gräns, samt nya $\bar{y}$ till subproblemet. Metoden avslutas då den undre gränsen är lika med den övre.

4b: För $\bar{y} = 0$: $\psi(\bar{y}) = \max -7u_1 - 4u_2$ då $u \in U$.
Lösningen är $u_1 = 2$, $u_2 = 1$ med med $\psi(\bar{y}) = -18$, vilket ger $\bar{v} = -18$. Benderssnittet blir $q \geq -20y - 18$.

Benders masterproblem:

$$\begin{array}{ll}
\min & q \\
\text{då} & q \geq -20y - 18 \\
& y_1, y_2 \in \{0, 1, 2, 3\}
\end{array}$$

Den bästa lösningen är $y = 3$ med $q = -78$. Vi har nu $-78 \leq v^* \leq -18$.

För $\bar{y} = 3$: $\psi(\bar{y}) = \max -67u_1 - 4u_2 + 60$ då $u \in U$.
Lösningen är $u_1 = 2$, $u_2 = 1$ med med $\psi(\bar{y}) = -78$, vilket ger $\bar{v} = -78$. Vi har nu $-78 \leq v^* \leq -78$, vilket visar att optimum är uppnått.

Komplementaritet för subproblemet ger $x_2 = 0$ samt att båda primala bivillkoren ska vara uppfyllda med likhet, vilket ger $x_3 = 71/3 \approx 23.67$ och $x_1 = 130/3 \approx 43.33$.

Den optimala lösningen är alltså $x_1 = 23.67$, $x_2 = 0$, $x_3 = 43.33$ samt $y = 3$. Svar i ord: Checka in tre väskor.

4c: U har bara två extrempunker, så det finns bara två snitt.

Uppgift 5

5a: I varje iteration genereras en ny extrempunkt till det konstanta tillåtna området till subproblemet, och det finns bara ändligt många.

5b: I varje iteration genereras en ny extrempunkt till det konstanta duala tillåtna området till subproblemet, och det finns bara ändligt många.

5c: Subproblemet har bristande styrbarhet, så optimum kanske inte är en extrempunkt i subproblemet, och kanske därför aldrig fås.

5d: Subgradienten är lutningen av den duala funktionen, så det är subgradienten som multipliceras med u i snitten.

Uppgift 6

6a: En maskin: Alla noder utom nod 5 har udda valens. Bågarna (1,6) och (4,7) måste dubbleras, eftersom nod 1 och 7 har valens 1. Dubblering av dessa samt båge (2,3) är billigaste sättet att ge alla noder jämn valens. Kostnaden för turen blir $64 + 20 = 84$. Tiden blir 84, och fasta kostnaden 20. Målfunktionsvärdet blir då $84 + 20 + 84 = 188$.

6b: Två maskiner: Förslag på uppdelning:
Maskin 1: Tur 1-6-3-2-5-6-1. Kostnad: 39. Tid: 39.
Maskin 2: Tur 7-4-3-2-6-4-7. Kostnad: 45. Tid: 45.
Fast kostnad: 40. Maxtid: 45. Målfunktionsvärdet blir nu $39 + 45 + 40 + 45 = 169$.

6c: Tre maskiner: Förslag på uppdelning:
Maskin 1: Tur 1-6-4-7-4-6-1. Kostnad: 40. Tid: 40.
Maskin 2: Tur 5-2-3-6-5. Kostnad: 27. Tid: 27.
Maskin 3: Tur 4-6-2-3-4. Kostnad: 35. Tid: 35.
Fast kostnad: 60. Maxtid: 40. Målfunktionsvärdet blir nu $40+27+35+60+40 = 202$.

6d: Totala kostnaden blir lägst för två maskiner.

Uppgift 7

7a: Lagrangerelaxationen: $\varphi(u) = \min_x \sum_{j=1}^{n} (x_j - dr_j)^2 + u(\sum_{j=1}^{n} x_j - m)$.

För $u = 0$ fås, för varje j, $\varphi_j(0) = \min_{x_j}(x_j - dr_j)^2$, som har optimum för x_j i det heltal som ligger närmast dr_j. Det blir $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 3$, $x_4 = 1$, $x_5 = 2$, med $\varphi(0) = 0.4^2 + 0.4^2 + 0.1^2 + 0.3^2 = 0.16 + 0.16 + 0.01 + 0.09 = 0.42$. Detta ger en undre gräns på 0.42.

En subgradient fås genom att stoppa in lösningen i det relaxerade bivillkoret, vilket ger $\xi = 2 + 3 + 3 + 1 + 2 - 10 = 1$. Detta betyder att vi har delat ut ett mandat för mycket, och måste öka u lite, för att minska vänsterledet i bivillkoret.

7b: Nu måste vi finna minimum till $(x_j - dr_j)^2 + ux_j$ för varje j. Den kontinuerliga lösningen blir $x_j^C = dr_j - u/2$. Eftersom målfunktionen är konvex, måste heltalsminimum ligga i en av de två närliggande heltalspunkterna, så vi evaluerar båda och tar den bästa av den, dvs. finn $\min(\lfloor dr_j - u/2 \rfloor, \lfloor dr_j - u/2 \rfloor + 1)$. Det innebär bara att löpa igenom alla variablerna en gång, vilket är effektivt. (Det är separabiliteten som gör att det blir så lätt.)

Uppgift 8

Modell:
$\min 6x_{16} + 9x_{23} + 5x_{25} + 7x_{26} + 10x_{34} + 7x_{36} + 9x_{46} + 5x_{47} + 6x_{56}$
då $x_{16} + x_{26} + x_{36} + x_{46} + x_{56} = 3$, $x \in T$.

Lagrangerelaxation:
$\varphi(u) = \min\limits_{x \in T} 6x_{16} + 9x_{23} + 5x_{25} + 7x_{26} + 10x_{34} + 7x_{36} + 9x_{46} + 5x_{47} + 6x_{56} + u(x_{16} + x_{26} + x_{36} + x_{46} + x_{56} - 3) =$
$\min\limits_{x \in T}(6 + u)x_{16} + 9x_{23} + 5x_{25} + (7 + u)x_{26} + 10x_{34} + (7 + u)x_{36} + (9 + u)x_{46} + 5x_{47} + (6 + u)x_{56} - 3u$
Dvs. addera u till kostnaderna på alla bågar som går till nod 6.

För $u = 0$ fås ursprungskostnaderna. Lös med Kruskals eller Prims metod. Optimallösning: alla bågar utom (2,3), (2,6) och (3,4), med kostnad 38, dvs. $\varphi(0) = 38$, så $\underline{v} = 38$. $\xi = x_{16} + x_{26} + x_{36} + x_{46} + x_{56} - 3 = 1 > 0$, så lösningen är inte tillåten.

Vi behöver öka u, vilket kommer att öka bågkostnaderna på bågar till nod 6. Det enda som kan hända är att någon av de bågar som går till nod 6 och som är med i lösningen blir så dyr att den inte ska vara med. Det kan hända med bågarna (2,6), (3,6), (4,6) och (5,6). (Båge (1,6) måste vara med, för det finns inga alternativ att nå nod 1.) Eftersom ändringen blir lika stor för dessa bågar, kommer den som är dyrast att först åka ur lösningen. Det är båge (4,6). När den åker ur, måste någon annan båge komma in, och det måste vara en båge i cykeln 3-4-6-3. Den enda möjligheten är båge (3,4), som kostar 10. När $u = 1$, blir båge (4,6) lika dyr, och man kan välja båge (3,4) istället. Lösningen kommer då att uppfylla bivillkoret.

Vi sätter därför $u = 1$ (och ser till att vi tar båge (3,4) och inte (4,6), då dessa är lika dyra).

Alltså, öka kostnaderna på alla bågar som går till nod 6 med 1, och lös om. Optimallösning blir samma som förut, men med båge (4,6) ersatt av (3,4). Kostnaden blir 42. dvs. $\varphi(1) = 42 - 3 = 39$, så $\underline{v} = 39$. Vi får $\xi = 0$, så lösningen är tillåten. Då får vi övre gräns $\bar{v} = 39$, och har funnit optimum och kan sluta.