Tekniska Högskolan i Linköping	Optimering av realistiska sammansatta system
Matematiska Institutionen	Lösning till tentamen
Optimeringslära	2019-08-27
Kaj Holmberg	

Lösningar/svar

Uppgift 1

1a: Variabeldefinition: $x_j = 1$ om objekt j byggs, 0 om inte.

max $z = 10x_1 + 8x_2 + 7x_3 + 4x_4 + 8x_5$
då $3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 \leq 10$
$x_j \in \{0, 1\}$ för $j = 1, 2, 3, 4, 5$

1b: Indata: c_k : intäkt, a_k : kostnad.
Definitioner:
Tillstånd: $s_k =$ den kostnad (mkr) som får användas till de k första objekten.
Styrning: $x_k = 1$ om objekt k byggs, 0 om inte.
Överföringsfunktion: $s_{k-1} = s_k - a_k x_k$.
Målfunktion: $f_k(s_k) = \max_{x_k}(c_k x_k + f_{k-1}(s_{k-1}))$.
$0 \leq s_k \leq 10$ för alla k. $s_0 \geq 0$, $s_5 = 10$. $f_0(s_0) = 0$.

1c:

Iteration 1:

$x_1 \backslash s_1$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	-	-	-	10	10	10	10	10	10	10	10
$f_1(s_1)$	0	0	0	10	10	10	10	10	10	10	10
$\hat{x}_1(s_1)$	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1

Iteration 2:

$x_2 \backslash s_2$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0	0	10	10	10	10	10	10	10	10
1	-	-	-	-	8	8	8	18	18	18	18
$f_2(s_2)$	0	0	0	10	10	10	10	18	18	18	18
$\hat{x}_2(s_2)$	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1

Iteration 3:

$x_3 \backslash s_3$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0	0	10	10	10	10	18	18	18	18
1	-	-	7	7	7	17	17	17	17	25	25
$f_3(s_3)$	0	0	7	10	10	17	17	18	18	25	25
$\hat{x}_3(s_3)$	0	0	1	0	0	1	1	0	0	1	1

Iteration 4:

$x_4 \backslash s_4$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0	7	10	10	17	17	18	18	25	25
1	-	4	4	11	14	14	21	21	22	22	29
$f_4(s_4)$	0	4	7	11	14	17	21	21	22	25	29
$\hat{x}_4(s_4)$	0	1	0	1	1	0	1	1	1	0	1

Iteration 5:

$x_5 \backslash s_5$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	4	7	11	14	17	21	21	22	25	29
1	-	-	-	8	12	15	19	22	25	29	29
$f_5(s_5)$	0	4	7	11	14	17	21	22	25	29	29
$\hat{x}_5(s_5)$	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0

Uppnystning: $s_5 = 10$, $x_5 = 0$, $s_4 = 10$, $x_4 = 1$, $s_3 = 9$, $x_3 = 1$, $s_2 = 7$, $x_2 = 1$, $s_1 = 3$, $x_1 = 1$, $s_0 = 0$. $z = 29$.
Svar i ord: Bygg objekt 1, 2, 3 och 4, men inte 5. Total framtida intäkt: 29.

1d: Använd kolumnen med $s_5 = 9$ i uppgift c. Nysta upp: $s_5 = 9$, $x_5 = 1$, $s_4 = 6$, $x_4 = 1$, $s_3 = 5$, $x_3 = 1$, $s_2 = 3$, $x_2 = 0$, $s_1 = 3$, $x_1 = 1$, $s_0 = 0$. $z = 29$.
Svar i ord: Skillnaden är att objekt 5 ersätter objekt 2. Totalt värde: 29.

Uppgift 2

2a: Subproblem (Lagrangerelaxation):

$\varphi(\bar{u}) = \min -10x_1 - 8x_2 - 7x_3 - 4x_4 - 8x_5 + u(3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 - 9) = (3u-10)x_1 + (4u-8)x_2 + (2u-7)x_3 + (u-4)x_4 + (3u-8)x_5 - 9u$
då $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in \{0, 1\}$

F.ö. se kurslitteraturen.

2b: $\bar{u} = 0$ ger $\varphi(0) = \min -10x_1 - 8x_2 - 7x_3 - 4x_4 - 8x_5$ då $x \in \{0, 1\}$,
vilket har lösningen $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 1$, $x_5 = 1$, och $\varphi(0) = -37$, vilket ger $\underline{v} = -37$. Subgradient: $\xi = 4 > 0$ så lösningen är inte tillåten och ingen övre gräns fås.

$\bar{u} = 2$ ger $\varphi(2) = \min -4x_1 - 3x_3 - 2x_4 - 2x_5 - 18$ då $x \in \{0, 1\}$, vilket har lösningen $x_1 = 1$, $x_2 = 0$ (eller 1), $x_3 = 1$, $x_4 = 1$, $x_5 = 1$, och $\varphi(2) = -29$, en bättre undre gräns, $\underline{v} = -29$. Vi får subgradient $\xi = 0$, lösningen tillåten, övre gräns -29.

$\bar{u} = 3$ ger $\varphi(3) = \min -x_1 + 4x_2 - x_3 - x_4 + x_5 - 27$ då $x \in \{0, 1\}$, vilket har lösningen $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 1$, $x_5 = 0$, och $\varphi(3) = -30$, inte en bättre undre gräns. Vi får subgradient $\xi = -3 < 0$, lösningen tillåten, ger övre gräns -21.

$\bar{u} = 4$ ger $\varphi(4) = \min 2x_1 + 8x_2 + x_3 + 4x_5 - 36$ då $x \in \{0, 1\}$, vilket har lösningen $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$, och $\varphi(3) = -36$, inte en bättre undre gräns. Vi får subgradient $\xi = -9 < 0$, lösningen tillåten, ger inte bättre övre gräns.

Bästa gränser: $-29 \le v^* \le -29$. Gränserna visar att vi har funnit optimum.

2c: Vi vill alltså att minimering av $(3u-10)x_1 + (4u-8)x_2 + (2u-7)x_3 + (u-4)x_4 + (3u-8)x_5$ ska ge lösningen $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 1$, $x_5 = 1$. Detta kräver att $(3u-10) \le 0$, $(4u-8) \ge 0$, $(2u-7) \le 0$, $(u-4) \le 0$, $(3u-8) \le 0$, dvs. $u \le 10/3$,

$u \geq 2$, $u \leq 7/2$, $u \leq 4$, $u \leq 8/3$, vilket ger $u \geq 2$ och $u \leq 8/3$ vilket har lösning, t.ex. $u = 7/3$. Vi har alltså styrbarhet.

Uppgift 3

3a: Dantzig-Wolfe: Subproblemet återfinnes ovan (men med $0 \leq x \leq 1$ istället för $x \in \{0,1\}$, vilket inte gör någon skillnad). Masterproblemet blir

$$\begin{array}{ll} \max & q \\ \text{då} & q \leq -10x_1^{(l)} - 8x_2^{(l)} - 7x_3^{(l)} - 4x_4^{(l)} - 8x_5^{(l)} + \\ & \qquad u(3x_1^{(l)} + 4x_2^{(l)} + 2x_3^{(l)} + x_4^{(l)} + 3x_5^{(l)} - 9) \ \text{ för alla } l \\ & u \geq 0 \end{array}$$

Metoden itererar mellan subproblemet och masterproblemet. Subproblemet löses för givna värden på u, och ger en undre gräns, $\varphi(\bar{u})$, samt en ny lösning, $x^{(l)}$, till masterproblemet. Masterproblemet löses med alla kända $x^{(l)}$, och ger en övre gräns, samt nytt $\bar{u}$ till subproblemet. Metoden avslutas då den undre gränsen är lika med den övre. Då läser man ut den duala lösningen, λ, till masterproblemet, och skapar den optimala lösningen som $\sum_l \lambda_l x^{(l)}$.

3b: Punkten (1, 1, 1, 1, 1) ger snitt: $q \leq -37 + 4u$.
Punkten (1, 0, 1, 1, 1) ger snitt: $q \leq -29$.
Punkten (1, 0, 1, 1, 0) ger snitt: $q \leq -21 - 3u$.
Punkten (0, 0, 0, 0, 0) ger snitt: $q \leq -9u$.

Masterproblemet blir alltså

$$\begin{array}{rlll} v_{DM} = \max & q & & \\ \text{då} & q \leq & -37 + 4u & (1) \\ & q \leq & -29 & (2) \\ & q \leq & -21 - 3u & (3) \\ & q \leq & -9u & (3) \\ & u \geq & 0 & \end{array}$$

Snitt 1 samt 2 eller 3 är aktiva i maximum, som fås i $u = 2$, med $q = -29$ eller i $u = 8/3$, med $q = -29$. Vi får alltså $\bar{v} = v_{DM} = -29$. Vi har tidigare fått $\underline{v} = -29$, så vi behöver inte lösa något mer subproblem.

LP-dualen av masterproblemet blir

$$\begin{array}{ll} v_{DM} = \min & -37\lambda_1 - 29\lambda_2 - 21\lambda_3 \\ \text{då} & -4\lambda_1 + 3\lambda_3 + 9\lambda_4 \geq 0 \\ & \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1 \\ & \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \geq 0 \end{array}$$

Komplementaritet ger $\lambda_4 = 0$ (eftersom detta snitt inte är aktivt) samt $\lambda_3 = 0$ eller $\lambda_2 = 0$. Vi har även $-4\lambda_1 + 3\lambda_3 = 0$ (eftersom $u > 0$), dvs. $\lambda_3 = 4/3\ \lambda_1$. Om vi sätter $\lambda_3 = 0$, fås $\lambda_1 = 0$, samt $\lambda_2 = 1$. Den optimala primala lösningen blir då $x = \lambda_2 x^{(2)} = (1,0,1,1,1)$.
Om vi sätter $\lambda_2 = 0$, och har $\lambda_1 + \lambda_3 = 1$, fås $\lambda_1 = 3/7$ och $\lambda_3 = 4/7$. Den optimala primala lösningen blir då $x = \lambda_1 x^{(1)} + \lambda_3 x^{(3)} = 3/7\ (1,1,1,1,1) + 4/7\ (1,0,1,1,0) = (1, 3/7, 1, 1, 3/7)$.
(Extrakoll: Insättning ger att bivillkoret är uppfyllt med likhet.)

Uppgift 4

4a: Modell:

$$\begin{array}{rrcl} v^* = \min & -10x_1 - 8x_2 - 7x_3 - 4x_4 - 8x_5 + 7y & & \\ \text{då} & 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 - 4y & \leq & 9 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 & \leq & 1 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 & \geq & 0 \\ & y & \in & \{0,1\} \end{array}$$

4b: Subproblemet (för fixerat y):

$$\begin{array}{rrcl} \psi(\bar{y}) = \min & -10x_1 - 8x_2 - 7x_3 - 4x_4 - 8x_5 + 7\bar{y} & & \\ \text{då} & 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 & \leq & 9 + 4\bar{y} \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 & \leq & 1 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 & \geq & 0 \end{array}$$

LP-dualen av subproblemet:

$$\begin{array}{rrcl} \psi(\bar{y}) = \max & (-9 - 4\bar{y})u_0 - u_1 - u_2 - u_3 - u_4 - u_5 + 7\bar{y} & & \\ \text{då} & -3u_0 - u_1 & \leq & -10 \\ & -4u_0 - u_2 & \leq & -8 \\ & -2u_0 - u_3 & \leq & -7 \\ & -u_0 - u_4 & \leq & -4 \\ & -3u_0 - u_5 & \leq & -8 \\ & u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 & \geq & 0 \end{array}$$

De duala bivillkoren kan skrivas som $U = \{u : 3u_0 + u_1 \geq 10, 4u_0 + u_2 \geq 8, 2u_0 + u_3 \geq 7, u_0 + u_4 \geq 4, 3u_0 + u_5 \geq 8, u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 \geq 0\}$.

Benders masterproblem:

$$\begin{array}{ll} \min & q \\ \text{då} & q \geq (7 - 4u_0^{(l)})y - 9u_0^{(l)} - u_1^{(l)} - u_2^{(l)} - u_3^{(l)} - u_4^{(l)} - u_5^{(l)} \quad \text{för alla } l \\ & y \in \{0,1\} \end{array}$$

Metoden itererar mellan subproblemet och masterproblemet. Subproblemet löses för givna värden på y, och ger en övre gräns, $h(\bar{y})$, samt en ny lösning, $u^{(l)}$, till masterproblemet. Masterproblemet löses med alla kända $u^{(l)}$, och ger en undre gräns, samt nya $\bar{y}$ till subproblemet. Metoden avslutas då den undre gränsen är lika med den övre.

4b: För $\bar{y} = 0$: Primalt:

$$\begin{array}{rrcl} \psi(\bar{y}) = \min & -10x_1 - 8x_2 - 7x_3 - 4x_4 - 8x_5 & & \\ \text{då} & 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 & \leq & 9 \\ & 0 \leq x \leq 1 & & \end{array}$$

Den primala lösningen till det kontinuerliga kappsäcksproblemet med $b = 9$ blir som följer: $x_4 = 1$, $\hat{b} = 8$, $x_3 = 1$, $\hat{b} = 6$, $x_1 = 1$, $\hat{b} = 3$, $x_5 = 1$, $\hat{b} = 0$, $x_2 = 0$, med målfunktionsvärde $-10 - 7 - 4 - 8 = -29$.

Dualen: $\psi(\bar{y}) = \max -9u_0 - u_1 - u_2 - u_3 - u_4 - u_5$ då $u \in U$.
Den duala lösningen blir $u_2 = 0$, sedan $u_0 = 2$, och därefter $u_1 = 4$, $u_3 = 3$, $u_4 = 2$, $u_5 = 2$. Detta ger $\psi(\bar{y}) = -29$, vilket ger $\bar{v} = -29$.

Benderssnittet blir $q \geq -y - 29$.

Benders masterproblem:

$$\begin{array}{ll} \min & q \\ \text{då} & q \geq -y - 29 \\ & y \in \{0, 1\} \end{array}$$

Den bästa lösningen är $y = 1$ med $q = -30$. Vi har nu $-30 \leq v^* \leq -29$.

För $\bar{y} = 1$: $\psi(\bar{y}) = \max -13u_0 - u_1 - u_2 - u_3 - u_4 - u_5 + 7$ då $u \in U$.
Den primala lösningen till det kontinuerliga kappsäcksproblemet med $b = 13$ blir att sätta alla x_j till 1, med målfunktionsvärde $-10 - 8 - 7 - 4 - 8 + 7 = -30$. Den duala lösningen blir $u_0 = 0$, och därefter $u_1 = 10$, $u_2 = 8$, $u_3 = 7$, $u_4 = 4$, $u_5 = 8$. Detta ger $\psi(\bar{y}) = -30$, vilket ger $\bar{v} = -30$.

Vi har nu $-30 \leq v^* \leq -30$, vilket visar att optimum är uppnått.

Den optimala lösningen är alltså $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 1$ $x_5 = 1$, samt $y = 1$.
Svar i ord: Anlita Bosses Bygg.

Uppgift 5

5a: I varje iteration genereras en ny extrempunkt till det konstanta tillåtna området till subproblemet, och det finns bara ändligt många.

5b: I varje iteration genereras en ny extrempunkt till det konstanta duala tillåtna området till subproblemet, och det finns bara ändligt många.

5c: Subproblemet har bristande styrbarhet, så optimum kanske inte är en extrempunkt i subproblemet, och kanske därför aldrig fås.

5d: Subgradienten är lutningen av den duala funktionen, så det är subgradienten som multipliceras med u i snitten.

Uppgift 6

6a: En maskin: Noderna 2, 4, 6 och 8 har udda valens. Dubblering av bågarna (2,5), (4,5), (6,9) och (8,9) är billigaste sättet att ge alla noder jämn valens. Kostnaden för turen blir $76 + 24 = 100$. Tiden blir 100, och fasta kostnaden 10. Målfunktionsvärdet blir då $100 + 100 + 10 = 210$.

6b: Två maskiner: Förslag på uppdelning:
Maskin 1: Tur 1-2-5-4-5-8-7-4-1. Kostnad: 49. Tid: 49.
Maskin 2: Tur 3-6-5-6-9-8-5-2-3. Kostnad: 52. Tid: 52.
Fast kostnad: 20. Maxtid: 52. Målfunktionsvärdet blir nu $49 + 52 + 20 + 52 = 173$.

6c: Tre maskiner: Förslag på uppdelning:
Maskin 1: Tur 1-4-5-8-7-4-1. Kostnad: 36. Tid: 36.
Maskin 2: Tur 3-6-9-8-5-6-3. Kostnad: 35. Tid: 35.
Maskin 3: Tur 1-2-3-2-5-2-1. Kostnad: 42. Tid: 42.
Fast kostnad: 30. Maxtid: 42. Målfunktionsvärdet blir nu $36+35+42+30+42 = 185$.

6d: Totala kostnaden blir lägst för två maskiner.

Uppgift 7

Riksdagsspärren ger att $x_4 = 0$.

7a: Lagrangerelaxationen med första funktionen:
$\varphi(u) = \min_x \sum_{j=1}^{n}(x_j - c_j)^2 + u(\sum_{j=1}^{n} x_j - m)$.
För $u = 0$ fås, för varje j, $\varphi_j(0) = \min_{x_j}(x_j - c_j)^2$, som har optimum för x_j i det heltal som ligger närmast c_j. Det blir $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 3$, $x_4 = 0$, $x_5 = 2$, med $\varphi(0) = 0.4^2 + 0.4^2 + 0.3^2 = 0.41$. Detta ger en undre gräns på 0.41.

En subgradient fås genom att stoppa in lösningen i det relaxerade bivillkoret, vilket ger $\xi = 2 + 3 + 3 + 2 - 10 = 0$. Detta betyder att vi har delat ut precis rätt antal mandat. Vi vill därför inte ändra u.

Lagrangerelaxationen med andra funktionen:
$\varphi(u) = \min_x \sum_{j=1}^{n}(x_j - c_j)^2/c_j + u(\sum_{j=1}^{n} x_j - m)$.
För $u = 0$ fås, för varje j, $\varphi_j(0) = \min_{x_j}(x_j - c_j)^2/c_j$, som har samma optimum som ovan, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 3$, $x_4 = 0$, $x_5 = 2$, men med $\varphi(0) = 0.4^2/1.6 + 0.4^2/2.6 + 0.3^2/1.7 = 0.214$. Detta ger en undre gräns på 0.214. Även här fås subgradient noll.

7b: Nu ska vi finna minimum till $(x_j - c_j)^2 + ux_j$ för varje j. Den kontinuerliga lösningen blir $x_j^C = c_j - u/2$. Enligt ledningen finner vi $\min(\lfloor x_j^C \rfloor, \lfloor x_j^C \rfloor + 1)$.

För den andra målfunktionen ska vi finna minimum till $(x_j - c_j)^2/c_j + ux_j$ för varje j. Den kontinuerliga lösningen blir $x_j^{C2} = c_j - c_j u/2 = c_j(1 - u/2)$. Enligt ledningen finner vi $\min(\lfloor x_j^{C2} \rfloor, \lfloor x_j^{C2} \rfloor + 1)$. Vi ser att det blir en additiv ändring i första fallet och en multiplikativ i andra.

Men vi vill inte ändra u, så inget mer behöver göras.