Tekniska Högskolan i Linköping
Matematiska Institutionen
Optimeringslära
Kaj Holmberg

Optimering av realistiska sammansatta system
Lösning till tentamen
2020-01-18

Lösningar/svar

Uppgift 1

1a: Variabeldefinition: $x_j = 1$ om projekt j genomförs, 0 om inte.

max $z = 8x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 6x_5$
då $80x_1 + 40x_2 + 80x_3 + 40x_4 + 100x_5 \leq 200$
$x_j \in \{0, 1\}$ för $j = 1, 2, 3, 4, 5$

1b: Bivillkoret blir $4x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 5x_5 \leq 10$

Indata: c_k : värde, a_k : kostnad.
Definitioner:
Tillstånd: s_k = den kostnad (20 mkr) som får användas till de k första objekten.
Styrning: $x_k = 1$ om objekt k byggs, 0 om inte.
Överföringsfunktion: $s_{k-1} = s_k - a_k x_k$.
Målfunktion: $f_k(s_k) = \max_{x_k}(c_k x_k + f_{k-1}(s_{k-1}))$.
$0 \leq s_k \leq 10$ för alla k. $s_0 \geq 0$, $s_5 = 10$. $f_0(s_0) = 0$.

1c:

Iteration 1:

$x_1 \backslash s_1$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	-	-	-	-	8	8	8	8	8	8	8
$f_1(s_1)$	0	0	0	0	8	8	8	8	8	8	8
$\hat{x}_1(s_1)$	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1

Iteration 2:

$x_2 \backslash s_2$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0	0	0	8	8	8	8	8	8	8
0	-	-	3	3	3	3	11	11	11	11	11
$f_2(s_2)$	0	0	3	3	8	8	11	11	11	11	11
$\hat{x}_2(s_2)$	0	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1

Iteration 3:

$x_3 \backslash s_3$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0	3	3	8	8	11	11	11	11	11
1	-	-	-	-	5	5	8	8	13	13	16
$f_3(s_3)$	0	0	3	3	8	8	11	11	13	13	16
$\hat{x}_3(s_3)$	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1

Iteration 4:

$x_4 \backslash s_4$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0	3	3	8	8	11	11	13	13	16
1	-	-	2	2	5	5	10	10	13	13	15
$f_4(s_4)$	0	0	3	3	8	8	11	11	13	13	16
$\hat{x}_4(s_4)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Iteration 5:

$x_5 \backslash s_5$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0	3	3	8	8	11	11	13	13	16
1	-	-	-	-	-	6	6	9	9	14	14
$f_5(s_5)$	0	0	3	3	8	8	11	11	13	14	16
$\hat{x}_5(s_5)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0

Uppnystning: $s_5 = 10$, $x_5 = 0$, $s_4 = 10$, $x_4 = 0$, $s_3 = 10$, $x_3 = 1$, $s_2 = 6$, $x_2 = 1$, $s_1 = 4$, $x_1 = 1$, $s_0 = 0$. $z = 16$.
Svar i ord: Genomför projekt 1, 2 och 3. Total framtida intäkt: 16.

1d: Använd kolumnen med $s_5 = 9$ i uppgift c. Nysta upp: $s_5 = 9$, $x_5 = 1$, $s_4 = 4$, $x_4 = 0$, $s_3 = 4$, $x_3 = 0$, $s_2 = 4$, $x_2 = 0$, $s_1 = 4$, $x_1 = 1$, $s_0 = 0$. $z = 14$.
Svar i ord: Genomför projekt 1 och 5. Total framtida intäkt: 14.

1e: Om alla målfunktionskoefficienter multipliceras med 2, kommer alla värden i tabllerna all fördubblas, men ordningen mellan dem kommer inte att förändras, så man får precis samma lösning. (Alternativ motivering: Omskalning av målfunktionen ändrar inte optimallösningen.)

Uppgift 2

2a: Subproblem (Lagrangerelaxation):
$\varphi(\bar{u}) = \min -8x_1 - 3x_2 - 5x_3 - 2x_4 - 6x_5 + u(4x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 5x_5 - 10) = (4u - 8)x1 + (2u - 3)x2 + (4u - 5)x3 + (2u - 2)x4 + (5u - 6)x5 - 10u$
då $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in \{0, 1\}$

F.ö. se kurslitteraturen.

2b: $\bar{u} = 0$ ger $\varphi(0) = \min -8x_1 - 3x_2 - 5x_3 - 2x_4 - 6x_5$ då $x \in \{0, 1\}$,
vilket har lösningen $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 1$, $x_5 = 1$, och $\varphi(0) = -24$, vilket ger $\underline{v} = -24$. Subgradient: $\xi = 7 > 0$ så lösningen är inte tillåten och ingen övre gräns fås.

$\bar{u} = 1$ ger $\varphi(1) = \min -4x_1 - x_2 - x_3 - x_5 - 10$ då $x \in \{0, 1\}$, vilket har lösningen $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 0$, $x_5 = 1$, och $\varphi(2) = -17$, en bättre undre gräns, $\underline{v} = -17$. Vi får subgradient $\xi = 5$, så lösningen är inte tillåten och ingen övre gräns fås.

$\bar{u} = 1.5$ ger $\varphi(1.5) = \min -2x_1 + x_3 + x_4 + 1.5x_5 - 15$ då $x \in \{0, 1\}$, vilket har lösningen $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$, och $\varphi(1.5) = -17$, inte en bättre undre gräns. Vi får subgradient $\xi = -6 < 0$, lösningen tillåten, ger övre gräns -8. Man kan också sätta $x_2 = 1$, vilket ger subgradient $\xi = -4 < 0$, lösningen tillåten, och övre gräns -11.

$\bar{u} = 2$ ger $\varphi(2) = \min x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 4x_5 - 20$ då $x \in \{0, 1\}$, vilket har lösningen $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$, och $\varphi(3) = -20$, inte en bättre undre gräns. Vi får subgradient $\xi = -10 < 0$, lösningen tillåten, men ger inte bättre övre gräns.

Bästa gränser: $-17 \leq v^* \leq -8$. (eller $-17 \leq v^* \leq -11$). Gränserna visar inte att vi har funnit optimum.

2c: Vi vill alltså att minimering av $(4u-8)x1+(2u-3)x2+(4u-5)x3+(2u-2)x4+(5u-6)x5$ ska ge lösningen $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$. Detta kräver att $(4u-8) \leq 0$, $(2u-3) \leq 0$, $(4u-5) \leq 0$, $(2u-2) \geq 0$, $(5u-6) \geq 0$, dvs. $u \leq 2$, $u \leq 3/2$, $u \leq 5/4$, $u \geq 1$, $u \geq 6/5$, vilket ger $u \geq 6/5 = 1.2$ och $u \leq 5/4 = 1.25$ vilket har lösning, t.ex. $u = 1.22$. Vi har alltså styrbarhet.

Uppgift 3

3a: Dantzig-Wolfe: Subproblemet återfinnes ovan (men med $0 \leq x \leq 1$ istället för $x \in \{0,1\}$, vilket inte gör någon skillnad). Masterproblemet blir

$$\begin{array}{ll} \max & q \\ \text{då} & q \leq -8x_1^{(l)} - 3x_2^{(l)} - 5x_3^{(l)} - 2x_4^{(l)} - 6x_5^{(l)} + \\ & \qquad u(4x_1^{(l)} + 2x_2^{(l)} + 4x_3^{(l)} + 2x_4^{(l)} + 5x_5^{(l)} - -10) \text{ för alla } l \\ & u \geq 0 \end{array}$$

Metoden itererar mellan subproblemet och masterproblemet. Subproblemet löses för givna värden på u, och ger en undre gräns, $\varphi(\bar{u})$, samt en ny lösning, $x^{(l)}$, till masterproblemet. Masterproblemet löses med alla kända $x^{(l)}$, och ger en övre gräns, samt nytt $\bar{u}$ till subproblemet. Metoden avslutas då den undre gränsen är lika med den övre. Då läser man ut den duala lösningen, λ, till masterproblemet, och skapar den optimala lösningen som $\sum_l \lambda_l x^{(l)}$.

3b: Punkten (1, 1, 1, 1, 1) ger snitt: $q \leq -24 + 7u$.
Punkten (1, 1, 1, 0, 1) ger snitt: $q \leq -22 + 5u$.
Punkten (1, 0, 0, 0, 0) ger snitt: $q \leq -8 - 6u$.
(Punkten (1, 1, 0, 0, 0) ger snitt: $q \leq -11 - 4u$.)
Punkten (0, 0, 0, 0, 0) ger snitt: $q \leq -10u$.

Masterproblemet blir alltså

$$\begin{array}{rlll} v_{DM} = \max & q & & \\ \text{då} & q \leq & -24 + 7u & (1) \\ & q \leq & -22 + 5u & (2) \\ & q \leq & -8 - 6u & (3) \\ & q \leq & -10u & (4) \\ & u \geq & 0 & \end{array}$$

$\bar{u} = 1.2$ ger $\varphi(1.2) = \min -3.2x_1 - 0.6x_2 - 0.2x_3 + 0.8x_4 - 12$ då $x \in \{0,1\}$, vilket har lösningen $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$, och $\varphi(1.5) = -16$, en bättre undre gräns, $\underline{v} = -16$.

Snittet från denna lösning blir: $q \leq -16$. Om man adderar detta snitt (5) till masterproblemet, fås att snitt 5 är aktivt i optimum samt snitt 2 eller 3 eller inget av dem. Detta ger $u = 1.2$ eller $u = 1.3333$ eller något u därimellan, t.ex. $u = 1.25$. Det viktiga är dock att vi får övre gräns -16. Eftersom undre gränsen också är -16, har vi funnit optimum.

LP-dualen av masterproblemet blir

$$
\begin{array}{lll}
v_{DM} = \min & -24\lambda_1 - 22\lambda_2 - 8\lambda_3 - 16 + \lambda_5 \\
\text{då} & -7\lambda_1 - 5\lambda_2 + 6\lambda_3 + 10\lambda_4 \geq 0 \\
& \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 = 1 \\
& \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5 \geq 0
\end{array}
$$

Om vi utgår från lösningen där bara snitt 5 är aktivt, ger komplementaritet $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 0$ och $\lambda_4 = 0$. Vi får $\lambda_5 = 1$. Den optimala primala lösningen blir då $x = \lambda_5 x^{(5)} = (1, 1, 1, 0, 0)$.
(Extrakoll: Insättning ger att bivillkoret är uppfyllt med likhet.)
Lösning av LP-problemet (via LP-dualen) ger samma lösning.

Uppgift 4

4a: Modell:

$$
\begin{array}{rrcl}
v^* = \min & -8x_1 - 3x_2 - 5x_3 - 2x_4 - 6x_5 + 7y & & \\
\text{då} & 4x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 5x_5 - 4y \leq 10 & & \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 & \leq & 1 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 & \geq & 0 \\
& y & \in & \{0, 1\}
\end{array}
$$

4b: Subproblemet (för fixerat y):

$$
\begin{array}{rrcl}
\psi(\bar{y}) = \min & -8x_1 - 3x_2 - 5x_3 - 2x_4 - 6x_5 + 7\bar{y} & & \\
\text{då} & 4x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 5x_5 \leq 10 + 4\bar{y} & & \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 & \leq & 1 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 & \geq & 0
\end{array}
$$

LP-dualen av subproblemet:

$$
\begin{array}{rrcl}
\psi(\bar{y}) = \max & (-10 - 4\bar{y})u_0 - u_1 - u_2 - u_3 - u_4 - u_5 + 7\bar{y} & & \\
\text{då} & -4u_0 - u_1 & \leq & -8 \\
& -2u_0 - u_2 & \leq & -3 \\
& -4u_0 - u_3 & \leq & -5 \\
& -2u_0 - u_4 & \leq & -2 \\
& -5u_0 - u_5 & \leq & -6 \\
& u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 & \geq & 0
\end{array}
$$

De duala bivillkoren kan skrivas som $U = \{u : 4u_0 + u_1 \geq 8, 2u_0 + u_2 \geq 3, 4u_0 + u_3 \geq 5, 2u_0 + u_4 \geq 2, 5u_0 + u_5 \geq 6, u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 \geq 0\}$.

Benders masterproblem:

$$
\begin{array}{ll}
\min & q \\
\text{då} & q \geq (7 - 4u_0^{(l)})y - 10u_0^{(l)} - u_1^{(l)} - u_2^{(l)} - u_3^{(l)} - u_4^{(l)} - u_5^{(l)} \quad \text{för alla } l \\
& y \in \{0, 1\}
\end{array}
$$

Metoden itererar mellan subproblemet och masterproblemet. Subproblemet löses för givna värden på y, och ger en övre gräns, $h(\bar{y})$, samt en ny lösning, $u^{(l)}$, till masterproblemet. Masterproblemet löses med alla kända $u^{(l)}$, och ger en undre gräns, samt nya $\bar{y}$ till subproblemet. Metoden avslutas då den undre gränsen är lika med den övre.

4c: För $\bar{y} = 0$: Primalt:
$\psi(0) = \min -8x_1 - 3x_2 - 5x_3 - 2x_4 - 6x_5$ då $4x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 5x_5 \leq 10, 0 \leq x \leq 1$
Den primala lösningen till det kontinuerliga kappsäcksproblemet med $b = 10$ blir som följer: $x_1 = 1$, $\hat{b} = 6$, $x_2 = 1$, $\hat{b} = 4$, $x_3 = 1$, $\hat{b} = 0$, $x_5 = 0$, $\hat{b} = 0$, $x_4 = 0$, med

målfunktionsvärde -16.

Dualen: $\psi(0) = \max -10u_0 - u_1 - u_2 - u_3 - u_4 - u_5$ då $u \in U$.
Den duala lösningen blir först $u_5 = 0$ och $u_4 = 0$, sedan $u_0 = 1.2$, och därefter $u_1 = 3.2$, $u_2 = 0.6$, $u_3 = 0.2$. Vi har $\psi(0) = -16$, vilket ger $\bar{v} = -16$.

Benderssnittet blir $q \geq 2.2y - 16$.

Benders masterproblem:

$$\begin{array}{rl} \min & q \\ \text{då} & q \geq 2.2y - 16 \\ & y \in \{0,1\} \end{array}$$

Den bästa lösningen är $y = 0$ med $q = -16$. Vi har nu $-16 \leq v^* \leq -16$, vilket visar att optimum är uppnått. Den optimala lösningen är alltså $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 0$ $x_5 = 0$, samt $y = 0$. Svar i ord: Ta inte något lån.

Uppgift 5

5a: I varje iteration genereras en ny extrempunkt till det konstanta tillåtna området till subproblemet, och det finns bara ändligt många.

5b: I varje iteration genereras en ny extrempunkt till det konstanta duala tillåtna området till subproblemet, och det finns bara ändligt många.

5c: Subproblemet har bristande styrbarhet, så optimum kanske inte är en extrempunkt i subproblemet, och kanske därför aldrig fås.

5d: Subgradienten är lutningen av den duala funktionen, så det är subgradienten som multipliceras med u i snitten.

Uppgift 6

6a: En maskin: Noderna 1, 2, 4 och 6 har udda valens. Dubblering av bågarna (1,2) och (4,6) är billigaste sättet (ej unikt) att ge alla noder jämn valens. Kostnaden för turen blir $78 + 14 = 92$. Tiden blir 92, och fasta kostnaden 10. Målfunktionsvärdet blir då $92 + 92 + 10 = 194$.

6b: Två maskiner: Förslag på uppdelning:
Maskin 1: Tur 1-2-4-2-3-5-4-1. Kostnad: 52. Tid: 52.
Maskin 2: Tur 1-6-4-6-7-4-1. Kostnad: 44. Tid: 44.
Fast kostnad: 20. Maxtid: 52. Målfunktionsvärdet blir nu $52 + 44 + 20 + 52 = 168$.

6c: Tre maskiner: Förslag på uppdelning:
Maskin 1: Tur 2-3-5-4-2. Kostnad: 32. Tid: 32.
Maskin 2: Tur 1-2-4-6-4-1. Kostnad: 32. Tid: 32.
Maskin 3: Tur 4-7-6-1-4. Kostnad: 32. Tid: 32.
Fast kostnad: 30. Maxtid: 32. Målfunktionsvärdet blir nu $32 + 32 + 32 + 30 + 32 = 158$.

6d: Totala kostnaden blir lägst för tre maskiner.

6e: Med ovanstående turer fås följande kostnader, med f som fast kostnad:
En maskin: $184 + f$.

Två maskiner: $148 + 2f$.
Tre maskiner: $128 + 3f$.
En maskin är bäst om $184 + f \leq 148 + 2f$ och $184 + f \leq 128 + 3f$, vilket ger $f \geq 36$ och $f \geq 28$. Den fasta kostnaden måste alltså vara minst 36 för att en maskin ska vara bäst. (Detta gäller för de turer vi hittat.)

Uppgift 7

7a: Bivillkor: $x_{14} + x_{24} + x_{45} + x_{46} + x_{47} \leq 3$.

Lagrangerelaxation:
$\varphi(u) = \min_{x \in T} 8x_{12} + 7x_{14} + 9x_{16} + 7x_{23} + 5x_{24} + 9x_{35} + 11x_{45} + 6x_{46} + 6x_{47} + 5x_{57} + 10x_{67} + u(x_{14} + x_{24} + x_{54} + x_{46} + x_{47} - 3) = 8x_{12} + (7 + u)x_{14} + 9x_{16} + 7x_{23} + (5 + u)x_{24} + 9x_{35} + (11 + u)x_{45} + (6 + u)x_{46} + (6 + u)x_{47} + 5x_{57} + 10x_{67} - 3u$.

I ord: Öka kostnaden för alla bågar som går till nod 4 med u, och dra bort $3u$.

7b: För $u = 0$ fås MST: (1,4), (2,3), (2,4), (4,6), (4,7) och (5,7), med kostnad 36. Detta ger en undre gräns på 36. En subgradient fås som antal bågar till nod 4 minus 3, $\xi = 4 - 3 = 1 > 0$. En positiv subgradient betyder att lösningen inte är tillåten, vi får ingen övre gräns, samt att man bör öka u.

För $u = 1$ fås MST: (1,2), (2,3), (2,4), (4,6), (4,7) och (5,7), med kostnad $40 - 3 = 37$. (Lösningen ej unik.) Detta ger en undre gräns på 37. Vi får $\xi = 3 - 3 = 0$, så lösningen är tillåten. Vi får övre gräns 37. Eftersom $\xi = 0$ har vi ingen önskan att öka u. (Om vi tar med (1,4) istället för (1,2), får vi $\xi = 1$, dvs. ingen tillåten lösning.)

För $u = 2$ fås MST: (1,2), (2,3), (2,4), (4,6), (4,7) och (5,7), med kostnad 37, vilket är samma lösning som för $u = 1$. Nu har vi övre och undre gräns lika med 37, så lösningen för $u = 1$ (eller 2) är optimal.

7c: Antag att nod i har för hög valens. För ett MST gäller att i varje cykel i grafen ingår minst en båge, men inte alla. Om man ökar kostnaden för en båge i en cykel genom nod i som ingår i lösningen så att den blir lika dyr som den billigaste bågen i cykeln som inte ingår i lösningen, kan dessa bågar att byta plats i lösningen. (Om två bågar har samma kostnad, bör man givetvis välja den som inte går till nod i.)

Alternativt kan man göra följande för varje båge till nod i som är med i lösningen: Ta bort bågen (i, j) och finn det billigaste bågen (k, l) som förbinder de separata delarna av lösningen. Om vi ökar u tills $c_{ij} + u \geq c_{kl}$, kan vi ta med (k, l) istället för (i, j)

Kolla alla möjligheter och välj den som kräver den minsta ändringen av u, och gör denna ändring. Då kommer valensen för nod i att minska.

I exemplet: Betrakta cykeln 1-4-2-1. I lösningen för $u = 0$ ingår båge (1,4) och (2,4), men inte (1,2). Vi har $\bar{c}_{12} = 8$, $\bar{c}_{14} = 7 + u$ och $\bar{c}_{24} = 5 + u$, så om vi ökar u med 1, blir båge (1,4) lika dyr som båge (1,2), och vi kan ta med båge (1,2) i lösningen istället för (1,4).

Det är inte säkert att den dyraste bågen i lösningen kommer att tas bort. Det är heller inte säkert att den billigaste bågen som inte är med i lösningen kommer att tas med.