Tekniska Högskolan i Linköping
Matematiska Institutionen
Optimeringslära
Kaj Holmberg

Optimering av realistiska sammansatta system
Lösning till tentamen
2021-01-13

Lösningar/svar

Uppgift 1

1a: Variabeldefinition: $x_j = 1$ om paketet från leverantör j köps, 0 om inte.

min $z = 8x_1 + 7x_2 + 5x_3 + 3x_4 + 6x_5 + x_6$
då $5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 4x_5 + x_6 \geq 11$
$x_j \in \{0, 1\}$ för $j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

1b: Substitutionen ger

max $z = 8x_1 + 7x_2 + 5x_3 + 3x_4 + 6x_5 + x_6 - 30$
då $5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 4x_5 + x_6 \leq 8$
$x_j \in \{0, 1\}$ för $j = 1, 2, 3, 4, 5$

Nu betyder $x_j = 1$ att paketet från leverantör j inte köps.

1c: Indata: c_k : värde, a_k : antal doser.
Definitioner:
Tillstånd: $s_k =$ det antal doser som fås av de k första leverantörerna.
Styrning: $x_k = 1$ om paketet från leverantör k köpes, 0 om inte.
Överföringsfunktion: $s_{k-1} = s_k - a_k x_k$.
Målfunktion: $f_k(s_k) = \max_{x_k}(c_k x_k + f_{k-1}(s_{k-1}))$.
$0 \leq s_k \leq 8$ för alla k. $s_0 \geq 0$, $s_6 = 8$. $f_0(s_0) = 0$.

1d:

Iteration 1:

$x_1 \backslash s_1$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	-	-	-	-	-	8	8	8	8
$f_1(s_1)$	0	0	0	0	0	8	8	8	8
$\hat{x}_1(s_1)$	0	0	0	0	0	1	1	1	1

Iteration 2:

$x_2 \backslash s_2$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
	0	0	0	0	0	8	8	8	8
	-	-	-	-	7	7	7	7	7
$f_2(s_2)$	0	0	0	0	7	8	8	8	8
$\hat{x}_2(s_2)$	0	0	0	0	1	0	0	0	0

Iteration 3:

$x_3 \setminus s_3$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
	0	0	0	0	7	8	8	8	8
	-	-	-	5	5	5	5	12	13
$f_3(s_3)$	0	0	0	5	7	8	8	12	13
$\hat{x}_3(s_3)$	0	0	0	1	0	0	0	1	1

Iteration 4:

$x_4 \setminus s_4$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
	0	0	0	5	7	8	8	12	13
	-	-	3	3	3	8	10	11	11
$f_4(s_4)$	0	0	3	5	7	8	10	12	13
$\hat{x}_4(s_4)$	0	0	1	0	0	0	1	0	0

Iteration 5:

$x_5 \setminus s_5$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
	0	0	3	5	7	8	10	12	13
	-	-	-	-	6	6	9	11	13
$f_5(s_5)$	0	0	3	5	7	8	10	12	13
$\hat{x}_5(s_5)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Iteration 6:

$x_6 \setminus s_6$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
	0	0	3	5	7	8	10	12	13
	-	1	1	4	6	8	9	11	13
$f_5(s_5)$	0	1	3	5	7	8	10	12	13
$\hat{x}_5(s_5)$	0	1	0	0	0	0	0	0	0

Uppnystning: $s_6 = 8$, $x_6 = 0$, $s_5 = 8$, $x_5 = 0$, $s_4 = 8$, $x_4 = 0$, $s_3 = 8$, $x_3 = 1$, $s_2 = 5$, $x_2 = 0$, $s_1 = 5$, $x_1 = 1$, $s_0 = 0$. $z = 13$.
Svar i ord: Köp inte doser från leverantör 1 och 3, dvs. AstraZeneca och Janssen-Cilag. Det ger precis rätt antal doser. Kostnaden blir $30 - 13 = 17$.

1e: Högerledet ändras då till 6. Använd kolumnen med $s_6 = 6$ i uppgift d. Nysta upp: $s_6 = 6$, $x_6 = 0$, $s_5 = 6$, $x_5 = 0$, $s_4 = 6$, $x_4 = 1$, $s_3 = 4$, $x_3 = 0$, $s_2 = 4$, $x_2 = 1$, $s_1 = 0$, $x_1 = 0$, $s_0 = 0$. $z = 10$.
Svar i ord: Köp inte doser från leverantör 2 och 4, dvs. CureVac och Moderna. Det ger precis rätt antal doser. Kostnaden blir $30 - 10 = 20$.

1f: Om alla målfunktionskoefficienter multipliceras med 2, kommer alla värden i tabllerna all fördubblas, men ordningen mellan dem kommer inte att förändras, så man får precis samma lösning. (Alternativ motivering: Omskalning av målfunktionen ändrar inte optimallösningen.)

Uppgift 2

2a: Subproblem (Lagrangerelaxation):
$\varphi(\bar{u}) = \min -8x_1 - 7x_2 - 5x_3 - 3x_4 - 6x_5 - x_6 + 30 + u(5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 4x_5 + x_6 - 8) =$
$(5u - 8)x_1 + (4u - 7)x_2 + (3u - 5)x_3 + (2u - 3)x_4 + (4u - 6)x_5 + (u - 1)x_6 - 8u + 30$
då $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \in \{0, 1\}$

F.ö. se kurslitteraturen.

2b: $\bar{u} = 0$ ger $\varphi(0) = \min -8x_1 - 7x_2 - 5x_3 - 3x_4 - 6x_5 - x_6 + 30$ då $x \in \{0, 1\}$, vilket har lösningen $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 1$, $x_5 = 1$, $x_6 = 1$, och $\varphi(0) = 30 - 30 = 0$, vilket ger $\underline{v} = 0$. Subgradient: $\xi = 11 > 0$ så lösningen är inte tillåten och ingen övre gräns fås.

$\bar{u} = 1$ ger $\varphi(1) = \min -3x_1 - 3x_2 - 2x_3 - x_4 - 2x_5 - 8 + 30$ då $x \in \{0, 1\}$, vilket har lösningen $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 1$, $x_5 = 1$, $x_6 = 0$, och $\varphi(2) = 30 - 19 = 11$, en bättre undre gräns, $\underline{v} = 11$. Vi får subgradient $\xi = 10$, så lösningen är inte tillåten och ingen övre gräns fås.

$\bar{u} = 1.5$ ger $\varphi(1.5) = \min -0.5x_1 - x_2 - 0.5x_3 + 0.5x_6 - 12 + 30$ då $x \in \{0, 1\}$, vilket har lösningen $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$, $x_6 = 0$, och $\varphi(1.5) = 30 - 14 = 16$, en bättre undre gräns, $\underline{v} = 16$. Vi får subgradient $\xi = 4$, så lösningen är inte tillåten och ingen övre gräns fås.

$\bar{u} = 1.6$ ger $\varphi(1.6) = \min -0.6x_2 - 0.2x_3 + 0.2x_4 + 0.4x_5 + 0.6x_6 - 12.8 + 30$ då $x \in \{0, 1\}$, vilket har lösningen $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$, $x_6 = 0$, och $\varphi(1.6) = 30 - 13.6 = 16.4$, en bättre undre gräns, $\underline{v} = 16.4$. Vi får subgradient $\xi = -1 < 0$, lösningen tillåten, ger övre gräns $30 - 12 = 18$. (Man kan också sätta $x_1 = 1$, vilket ger subgradient $\xi = 4 > 0$, vilket visar att vi faktiskt har dualt max, med både en positiv och en negativ subgradient.)

$\bar{u} = 1.7$ ger $\varphi(1.7) = \min 0.5x_1 - 0.2x_2 + 0.1x_3 + 0.4x_4 + 0.8x_5 + 0.7x_6 - 13.6 + 30$ då $x \in \{0, 1\}$, vilket har lösningen $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$, $x_5 = 0$, och $\varphi(1.7) = 30 - 13.8 = 16.2$, inte en bättre undre gräns. Vi får subgradient $\xi = -4 < 0$, lösningen tillåten, med $z = 30 - 7 = 23$, vilket inte är en bättre övre gräns.

Bästa gränser: $16.4 \leq v^* \leq 18$. Gränserna visar inte att vi har funnit optimum.

2c: Vi vill alltså att minimering av $(5u - 8)x_1 + (4u - 7)x_2 + (3u - 5)x_3 + (2u - 3)x_4 + (4u - 6)x_5 + (u - 1)x_6$ ska ge lösningen $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$, $x_6 = 0$. Detta kräver att $(5u - 8) \leq 0$, $(4u - 7) \geq 0$, $(3u - 5) \leq 0$, $(2u - 3) \geq 0$, $(4u - 6) \geq 0$, $(u - 1) \geq 0$, dvs. $u \leq 8/5 = 1.6$, $u \geq 7/4 = 1.75$, $u \leq 5/3 \approx 1.67$, $u \geq 3/2 = 1.5$, $u \geq 6/4 = 1.5$, $u \geq 1$, vilket ger $u \geq 1.75$ och $u \leq 1.6$, vilket inte har någon lösning. Vi har alltså inte styrbarhet.

Uppgift 3

3a: Dantzig-Wolfe: Subproblemet återfinnes ovan (men med $0 \leq x \leq 1$ istället för $x \in \{0, 1\}$, vilket inte gör någon skillnad). Masterproblemet blir (utan konstanten 30)

$$\begin{array}{ll} \max & q \\ \text{då} & q \leq -8x_1^{(l)} - 7x_2^{(l)} - 5x_3^{(l)} - 3x_4^{(l)} - 6x_5^{(l)} - x_6^{(l)} + \\ & \qquad u(5x_1^{(l)} + 4x_2^{(l)} + 3x_3^{(l)} + 2x_4^{(l)} + 4x_5^{(l)} + x_6^{(l)} - 8) \;\; \text{för alla } l \\ & u \geq 0 \end{array}$$

Metoden itererar mellan subproblemet och masterproblemet. Subproblemet löses för givna värden på u, och ger en undre gräns, $\varphi(\bar{u})$, samt en ny lösning, $x^{(l)}$, till masterproblemet. Masterproblemet löses med alla kända $x^{(l)}$, och ger en övre gräns, samt nytt $\bar{u}$ till subproblemet. Metoden avslutas då den undre gränsen är lika med den övre.

Då läser man ut den duala lösningen, λ, till masterproblemet, och skapar den optimala lösningen som $\sum_l \lambda_l x^{(l)}$.

3b: Punkten (1, 1, 1, 1, 1, 1) ger snitt: $q \le -30 + 11u$.
Punkten (1, 1, 1, 1, 1, 0) ger snitt: $q \le -29 + 10u$.
Punkten (1, 1, 1, 0, 0, 0) ger snitt: $q \le -20 + 4u$.
Punkten (0, 1, 0, 0, 0, 0) ger snitt: $q \le -7 - 4u$.

Masterproblemet blir alltså

$$\begin{array}{rlll} v_{DM} = \max & q & & \\ \text{då} & q \le & -30 + 11u & (1) \\ & q \le & -29 + 10u & (2) \\ & q \le & -20 + 4u & (3) \\ & q \le & -7 - 4u & (4) \\ & u \ge & 0 & \end{array}$$

Snitt 3 och 4 är aktiva i maximum, som fås i $u = 13/8 = 1.625$, med $q = -27/2 = -13.5$. Vi får alltså $\bar{v} = v_{DM} = -13.5$, eller med konstanten $30 - 13.5 = 16.5$. Vi har tidigare (utan subproblemlösningen för $u = 1.6$) fått $\underline{v} = 16.2$, så $16.2 \le v^* \le 16.5$.

$\bar{u} = 1.625$ ger $\varphi(1.625) = \min 0.125x_1 - 0.5x_2 - 0.125x_3 + 0.25x_4 + 0.5x_5 + 0.625x_6 - 13 + 30$ då $x \in \{0, 1\}$, vilket har lösningen $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$, $x_6 = 0$, och $\varphi(1.625) = 30 - 13.625 = 16.375$, en bättre undre gräns, $\underline{v} = 16.375$. Vi har nu $16.375 \le v^* \le 16.5$.

Snittet från denna lösning blir: $q \le -12 - u$. Om man adderar detta snitt (5) till masterproblemet, fås att snitt 3 och 5 är aktiva i optimum. Detta ger $u = 1.6$, samt $q = -68/5 = -13.6$, vilket ger övre gräns $30 - 13.6 = 16.4$.

$\bar{u} = 1.6$ ger (som beskrives i uppgift 2) lösningen $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$, $x_6 = 0$, och $\varphi(1.6) = 16.4$. Både övre och undre gräns är nu lika med 16.4, så vi har funnit optimum. Den sista subproblemlösningen var densamma som den tidigare, så det blir inget nytt snitt i masterproblemet, som därför inte behöver lösas om.

LP-dualen av masterproblemet blir

$$\begin{array}{ll} v_{DM} = \min & -30\lambda_1 - 29\lambda_2 - 20\lambda_3 - 7\lambda_4 - 12\lambda_5 \\ \text{då} & -11\lambda_1 - 10\lambda_2 - 4\lambda_3 + 4\lambda_4 + \lambda_5 \ge 0 \\ & \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 = 1 \\ & \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5 \ge 0 \end{array}$$

Komplementaritet ger via inaktiva snitt $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$ och $\lambda_4 = 0$. Eftersom $u > 0$, får vi $-4\lambda_3 + \lambda_5 = 0$, som tillsammans med $\lambda_3 + \lambda_5 = 1$ ger $\lambda_3 = 1/5 = 0.2$ och $\lambda_5 = 4/5 = 0.8$. Den optimala primala lösningen blir då $x = \lambda_3 x^{(3)} + \lambda_5 x^{(5)} = 0.2(1, 1, 1, 0, 0, 0) + 0.8(0, 1, 1, 0, 0, 0) = (0.2, 1, 1, 0, 0, 0)$.
(Extrakoll: Insättning ger att bivillkoret är uppfyllt med likhet.)
Lösning av LP-problemet (via LP-dualen) ger samma lösning.

3c: I första iterationen i uppgift b har vi mastersnitten $q \le -30 + 11u$, $q \le -29 + 10u$, $q \le -20 + 4u$ och $q \le -7 - 4u$. Vi har även undre gränsen -13.8, så alla u som uppfyller $-30 + 11u > -13.8$, $-29 + 10u > -13.8$, $-20 + 4u > -13.8$ och $-7 - 4u > -13.8$ kan ge en högre undre gräns. (Rita detta område.)

Detta ger $u > 1.4727$, $u > 1.52$, $u > 1.55$, $u < 1.7$, så vi kan t.ex. ta $u = 1.6$. Om man stoppar in $u = 1.6$ i masterproblemet i första iterationen fås
$q \leq -12.4$, $q \leq -13$, $q \leq -13.6$, $q \leq -13.4$.
Eftersom dessa värden alla är större än -13.8, kan en högre undre gräns fås.
(Visa grafiskt att $u = 1.6$ skär detta område.)

Uppgift 4

4a: Modell:

$$\begin{array}{rrcl}
v^* = \min & -8x_1 - 7x_2 - 5x_3 - 3x_4 - 6x_5 - x_6 + 3y & & \\
\text{då} & 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 4x_5 + x_6 - 2y & \leq & 8 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 & \leq & 1 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 & \geq & 0 \\
 & y & \in & \{0, 1, 2\}
\end{array}$$

4b: Subproblemet (för fixerat y):

$$\begin{array}{rrcl}
\psi(\bar{y}) = \min & -8x_1 - 7x_2 - 5x_3 - 3x_4 - 6x_5 - x_6 + 3\bar{y} & & \\
\text{då} & 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 4x_5 + x_6 & \leq & 8 + 2\bar{y} \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 & \leq & 1 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 & \geq & 0
\end{array}$$

LP-dualen av subproblemet:

$$\begin{array}{rrcl}
\psi(\bar{y}) = \max & (-8 - 2\bar{y})u_0 - u_1 - u_2 - u_3 - u_4 - u_5 - u_6 + 3\bar{y} & & \\
\text{då} & -5u_0 - u_1 & \leq & -8 \\
 & -4u_0 - u_2 & \leq & -7 \\
 & -3u_0 - u_3 & \leq & -5 \\
 & -2u_0 - u_4 & \leq & -3 \\
 & -4u_0 - u_5 & \leq & -6 \\
 & -u_0 - u_6 & \leq & -1 \\
 & u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6 & \geq & 0
\end{array}$$

De duala bivillkoren kan skrivas som $U = \{u : 5u_0 + u_1 \geq 8, 4u_0 + u_2 \geq 7, 3u_0 + u_3 \geq 5, 2u_0 + u_4 \geq 3, 4u_0 + u_5 \geq 6, u_0 + u_6 \geq 1, u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6 \geq 0\}$.

Benders masterproblem:

$$\begin{array}{ll}
\min & q \\
\text{då} & q \geq (3 - 2u_0^{(l)})y - 8u_0^{(l)} - u_1^{(l)} - u_2^{(l)} - u_3^{(l)} - u_4^{(l)} - u_5^{(l)} - u_6^{(l)} \quad \text{för alla } l \\
 & y \in \{0, 1, 2\}
\end{array}$$

Metoden itererar mellan subproblemet och masterproblemet. Subproblemet löses för givna värden på y, och ger en övre gräns, $h(\bar{y})$, samt en ny lösning, $u^{(l)}$, till masterproblemet. Masterproblemet löses med alla kända $u^{(l)}$, och ger en undre gräns, samt nya $\bar{y}$ till subproblemet. Metoden avslutas då den undre gränsen är lika med den övre.

4c: För $\bar{y} = 0$: Primalt:
$\psi(0) = \min -8x_1 - 7x_2 - 5x_3 - 3x_4 - 6x_5 - x_6$
då $5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 4x_5 + x_6 \leq 8, 0 \leq x \leq 1$
Den primala lösningen till det kontinuerliga kappsäcksproblemet med $b = 8$ blir som följer: $x_2 = 1$, $\hat{b} = 4$, $x_3 = 1$, $\hat{b} = 1$, $x_1 = 0.2$, $\hat{b} = 0$, $x_4 = 0$, $\hat{b} = 0$, $x_5 = 0$, $\hat{b} = 0$, $x_6 = 0$, med målfunktionsvärde -13.6.

Dualen: $\psi(0) = \max -8u_0 - u_1 - u_2 - u_3 - u_4 - u_5 - u_6$ då $u \in U$.

Den duala lösningen blir först $u_1 = 0$, $u_4 = 0$, $u_5 = 0$ och $u_6 = 0$, sedan $u_0 = 1.6$, och därefter $u_2 = 0.6$, $u_3 = 0.2$. Vi har $\psi(0) = -13.6$, vilket ger $\bar{v} = -13.6$.

Benderssnittet blir $q \geq 2.2y - 13.6$.

Benders masterproblem:

$$\begin{array}{ll} \min & q \\ \text{då} & q \geq -0.2y - 13.6 \\ & y \in \{0, 1, 2\} \end{array}$$

Den bästa lösningen är $y = 2$ med $q = -14$. Vi har nu $-16 \leq v^* \leq -14$.

För $\bar{y} = 2$: Primalt:
$\psi(0) = \min -8x_1 - 7x_2 - 5x_3 - 3x_4 - 6x_5 - x_6 + 6$
då $5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 4x_5 + x_6 \leq 12, 0 \leq x \leq 1$
Den primala lösningen till det kontinuerliga kappsäcksproblemet med $b = 12$ blir som följer: $x_2 = 1$, $\hat{b} = 8$, $x_3 = 1$, $\hat{b} = 5$, $x_1 = 1$, $\hat{b} = 0$, $x_4 = 0$, $\hat{b} = 0$, $x_5 = 0$, $\hat{b} = 0$, $x_6 = 0$, med målfunktionsvärde $-20 + 6 = -14$.

Dualen: $\psi(2) = \max -12u_0 - u_1 - u_2 - u_3 - u_4 - u_5 - u_6$ då $u \in U$.
Den duala lösningen blir först $u_4 = 0$, $u_5 = 0$ och $u_6 = 0$, sedan $u_0 = 1.5$, och därefter $u_1 = 0.5$, $u_2 = 1$, $u_3 = 0.5$. Vi har $\psi(2) = -14$, vilket ger $\bar{v} = -14$.

Benderssnittet blir $q \geq -14$.

Benders masterproblem:

$$\begin{array}{ll} \min & q \\ \text{då} & q \geq -0.2y - 13.6 \\ & q \geq -14 \\ & y \in \{0, 1, 2\} \end{array}$$

Den bästa lösningen är $y = 2$ med $q = -14$.

Vi har nu $-14 \leq v^* \leq -14$, vilket visar att optimum är uppnått. Den optimala lösningen är alltså $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$, $x_6 = 0$, samt $y = 2$.
Svar i ord: Investera maximalt i utökad testningskapacitet.

Uppgift 5

5a: En maskin: Noderna 3 och 7 har udda valens. Dubblering av bågarna (3,5) och (5,7) är billigaste sättet att ge alla noder jämn valens. Kostnaden för turen blir $72+14 = 86$. Tiden blir 86, och fasta kostnaden 10. Målfunktionsvärdet blir då $86 + 86 + 10 = 182$.

5b: Två maskiner: Förslag på uppdelning:
Maskin 1: Tur 1-3-4-2-1. Kostnad: 36. Tid: 36.
Maskin 2: Tur 7-5-6-8-5-3-5-7. Kostnad: 50. Tid: 50.
Fast kostnad: 20. Maxtid: 50. Målfunktionsvärdet blir $36 + 50 + 20 + 50 = 156$.

5c: Tre maskiner: Förslag på uppdelning:
Maskin 1: Tur 1-3-4-2-1. Kostnad: 36. Tid: 36.
Maskin 2: Tur 5-6-8-5. Kostnad: 22. Tid: 22.
Maskin 3: Tur 7-5-3-5-7. Kostnad: 28. Tid: 28.
Fast kostnad: 30. Maxtid: 36. Målfunktionsvärdet blir nu $36+22+28+30+36 = 152$.

5d: Totala kostnaden blir lägst för tre maskiner.

5e: Med ovanstående turer fås följande kostnader, med f som fast kostnad:
En maskin: $172 + f$.
Två maskiner: $136 + 2f$.
Tre maskiner: $122 + 3f$.

En maskin är bäst om $172 + f \leq 136 + 2f$ och $172 + f \leq 122 + 3f$, vilket ger $f \geq 36$ och $f \geq 25$, dvs. om f är minst 36.

Två maskiner är bäst om $172 + f \geq 136 + 2f$ och $136 + 2f \leq 122 + 3f$, vilket ger $f \leq 36$ och $f \geq 14$, dvs. om f är mellan 14 och 36.

Tre maskiner är bäst om $172 + f \geq 122 + 3f$ och $136 + 2f \geq 122 + 3f$, vilket ger $f \leq 25$ och $f \leq 14$, dvs. om f är högst 14.

(Detta gäller för de turer vi hittat.)

Uppgift 6

6a: Finn billigaste uppspännande träd. Det har kostnad 58. Den längsta vägen i lösningen är 3-2-4-10-9-7-6-8-5, som innehåller 8 bågar. Den kan förbjudas med bivillkoret $x_{23} + x_{24} + x_{4,10} + x_{9,10} + x_{79} + x_{67} + x_{68} + x_{58} \leq 7$.

Lagrangerelaxation:
$\varphi(u) = \min_{x \in T} 10x_{12} + 16x_{14} + 5x_{1,10} + 11x_{23} + 4x_{24} + 14x_{35} + 13x_{38} + 9x_{47} + 11x_{48} + 9x_{4,10} + 6x_{58} + 7x_{67} + 6x_{68} + 10x_{78} + 7x_{79} + 12x_{7,10} + 3x_{9,10} + u(x_{23} + x_{24} + x_{4,10} + x_{9,10} + x_{79} + x_{67} + x_{68} + x_{58} - 7) = 10x_{12} + 16x_{14} + 5x_{1,10} + (11+u)x_{23} + (4+u)x_{24} + 14x_{35} + 13x_{38} + 9x_{47} + 11x_{48} + (9+u)x_{4,10} + (6+u)x_{58} + (7+u)x_{67} + (6+u)x_{68} + 10x_{78} + (7+u)x_{79} + 12x_{7,10} + (3+u)x_{9,10} - 7u$.

I ord: Öka kostnaden för alla bågar i den längsta vägen med u, och dra bort $7u$. T betecknar ett uppspännande träd.

För $u = 0$ fås samma MST som ovan, med kostnad $\varphi(0) = 58$. Detta ger en undre gräns på 58. En subgradient fås som antal bågar i vägen 3 - 5 minus 7, $\xi = 8 - 7 = 1 > 0$. En positiv subgradient betyder att lösningen inte är tillåten (vi får ingen övre gräns), samt att man bör öka u.

För $u = 1$ fås samma MST, förutom att båge (4,10) bytts mot (4,7), med kostnad 65, vilket ger $\varphi(1) = 65 - 7 = 58$, så undre gränsen ökar inte. En subgradient fås som antal bågar i vägen 3 - 5 minus 7, $\xi = 7 - 7 = 0$. Subgradient noll betyder att lösningen är tillåten, och vi får övre gräns 58. Vi inte vill ändra u. Lösningen innehåller nu faktiskt ingen väg med fler än 6 bågar. Övre och undre gräns är nu båda 58, så vi har funnit optimum.

6b: Finn först billigaste väg från nod 1 till nod 6. Vägen blir 1-10-9-7-6, som innehåller 4 bågar. Vi skapar nu ett bivillor som säger att summan av flödet i alla bågar ska vara mindre eller lika med 3. Bivillkoret blir $x_{12} + x_{14} + x_{1,10} + x_{23} + x_{24} + x_{35} + x_{38} + x_{47} + x_{48} + x_{4,10} + x_{58} + x_{67} + x_{68} + x_{78} + x_{79} + x_{7,10} + x_{9,10} \leq 3$.

Lagrangerelaxation:

$\varphi(u) = \min_{x \in V} 10x_{12} + 16x_{14} + 5x_{1,10} + 11x_{23} + 4x_{24} + 14x_{35} + 13x_{38} + 9x_{47} + 11x_{48} + 9x_{4,10} + 6x_{58} + 7x_{67} + 6x_{68} + 10x_{78} + 7x_{79} + 12x_{7,10} + 3x_{9,10} + u(x_{12} + x_{14} + x_{1,10} + x_{23} + x_{24} + x_{35} + x_{38} + x_{47} + x_{48} + x_{4,10} + x_{58} + x_{67} + x_{68} + x_{78} + x_{79} + x_{7,10} + x_{9,10} - 3) = (10+u)x_{12} + (16+u)x_{14} + (5+u)x_{1,10} + (11+u)x_{23} + (4+u)x_{24} + (14+u)x_{35} + (13+u)x_{38} + (9+u)x_{47} + (11+u)x_{48} + (9+u)x_{4,10} + (6+u)x_{58} + (7+u)x_{67} + (6+u)x_{68} + (10+u)x_{78} + (7+u)x_{79} + (12+u)x_{7,10} + (3+u)x_{9,10} - 3u.$

I ord: Öka kostnaden för alla bågar med u, och dra bort $3u$. V betecknar en väg från nod 1 till nod 6.

För $u = 0$ fås samma väg som ovan, med kostnad $\varphi(0) = 22$. Detta ger en undre gräns på 22. En subgradient fås som antal bågar i vägen minus 3, $\xi = 4 - 3 = 1 > 0$. En positiv subgradient betyder att lösningen inte är tillåten (vi får ingen övre gräns), samt att man bör öka u.

För $u = 1$ fås billigaste väg 1-10-9-7-6, med kostnad 26, vilket ger $\varphi(1) = 26 - 3 = 23$, vilket ger en högre undre gräns på 23. Subgradienten blir $\xi = 1 > 0$, så lösningen är inte är tillåten (vi får ingen övre gräns), och vi bör öka u.

För $u = 2$ fås billigaste väg 1-10-7-6, med kostnad 30, vilket ger $\varphi(2) = 30 - 6 = 24$, vilket ger en högre undre gräns på 23. Vägen 1-10-7-6 innehåller bara 3 bågar, så den är tillåten. Subgradienten blir noll, vilket indikerar att vi inte vill ändra u. Kostnaden för vägen är 24, vilket blir en övre gräns.

Vi har en undre gräns lika med 24 och en övre lika med 24, så detta är optimum.