Tekniska Högskolan i Linköping
Matematiska Institutionen
Optimeringslära
Kaj Holmberg

Optimering av realistiska sammansatta system
Lösning till tentamen
2021-03-16

Lösningar/svar

Uppgift 1

1a: Variabeldefinition: $x_j = 1$ om förslag j genomförs, 0 om inte.

max $z = 10x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 9x_4 + 11x_5 + 14x_6$
då $4x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 4x_5 + 5x_6 \leq 13$
$x_j \in \{0, 1\}$ för $j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

1b: Indata: c_k : värde, a_k : kostnad.
Definitioner:
Tillstånd: s_k = kostnad för de k första förslagen.
Styrning: $x_k = 1$ om förslag k genomförs, 0 om inte.
Överföringsfunktion: $s_{k-1} = s_k - a_k x_k$.
Målfunktion: $f_k(s_k) = \max_{x_k}(c_k x_k + f_{k-1}(s_{k-1}))$.
$0 \leq s_k \leq 13$ för alla k. $s_0 \geq 0$, $s_6 = 13$. $f_0(s_0) = 0$.

1c:

Iteration 1:

$x_1 \backslash s_1$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	-	-	-	-	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
$f_1(s_1)$	0	0	0	0	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
$\hat{x}_1(s_1)$	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Iteration 2:

$x_2 \backslash s_2$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
0	0	0	0	0	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
1	-	-	8	8	8	8	18	18	18	18	18	18	18	18
$f_2(s_2)$	0	0	8	8	10	10	18	18	18	18	18	18	18	18
$\hat{x}_2(s_2)$	0	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1

Iteration 3:

$x_3 \backslash s_3$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
0	0	0	8	8	10	10	18	18	18	18	18	18	18	18
1	-	2	2	10	10	12	12	20	20	20	20	20	20	20
$f_3(s_3)$	0	2	8	10	10	12	18	20	20	20	20	20	20	20
$\hat{x}_3(s_3)$	0	0	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1

Iteration 4:

$x_4 \backslash s_4$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
0	0	2	8	10	10	12	18	20	20	20	20	20	20	20
1	-	-	-	9	11	17	19	19	21	27	29	29	29	29
$f_4(s_4)$	0	2	8	10	11	17	19	20	21	27	29	29	29	29
$\hat{x}_4(s_4)$	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1

Iteration 5:

$x_5 \backslash s_5$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
0	0	2	8	10	11	17	19	20	21	27	29	29	29	29
1	-	-	-	-	11	13	19	21	22	28	30	31	32	38
$f_5(s_5)$	0	2	8	10	11	17	19	21	22	28	30	31	32	38
$\hat{x}_5(s_5)$	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1

Iteration 6:

$x_6 \backslash s_6$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
0	0	2	8	10	11	17	19	21	22	28	30	31	32	38
1	-	-	-	-	-	14	16	22	24	25	31	33	35	36
$f_6(s_6)$	0	2	8	10	11	17	19	22	24	28	31	33	35	38
$\hat{x}_6(s_6)$	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	

Uppnystning: $s_6 = 13$, $x_6 = 0$, $s_5 = 13$, $x_5 = 1$, $s_4 = 9$, $x_4 = 1$, $s_3 = 6$, $x_3 = 0$, $s_2 = 6$, $x_2 = 1$, $s_1 = 4$, $x_1 = 1$, $s_0 = 0$. $z = 38$.
Svar i ord: Utför förslag 1, 2, 4 och 5. Det ger en förväntad samhällsnytta på 38.

1e: Högerledet ändras då till 12.

Uppnystning: $s_6 = 12$, $x_6 = 1$, $s_5 = 7$, $x_5 = 1$, $s_4 = 3$, $x_4 = 0$, $s_3 = 3$, $x_3 = 1$, $s_2 = 2$, $x_2 = 1$, $s_1 = 0$, $x_1 = 0$, $s_0 = 0$. $z = 35$.
Svar i ord: Utför förslag 2, 3, 5 och 6. Det ger en förväntad samhällsnytta på 35.

Uppgift 2

2a: Subproblem (Lagrangerelaxation):
$\varphi(\bar{u}) = \min = 10x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 9x_4 + 11x_5 + 14x_6 + u(4x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 4x_5 + 5x_6 - 13) = (4u - 10)x_1 + (2u - 8)x_2 + (u - 2)x_3 + (3u - 9)x_4 + (4u - 11)x_5 + (5u - 14)x_6 - 13u$
då $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \in \{0, 1\}$

F.ö. se kurslitteraturen.

2b: $\bar{u} = 1$ ger $\varphi(1) = \min -6x_1 - 6x_2 - 1x_3 - 6x_4 - 7x_5 - 9x_6 - 13$ då $x \in \{0, 1\}$, vilket har lösningen $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 1$, $x_5 = 1$, $x_6 = 1$, och $\varphi(1) = -48$, vilket ger $\underline{v} = -48$. Subgradient: $\xi = 6 > 0$ så lösningen är inte tillåten och ingen övre gräns fås.

$\bar{u} = 2$ ger $\varphi(2) = \min -2x_1 - 4x_2 - 3x_4 - 3x_5 - 4x_6 - 26$ då $x \in \{0, 1\}$, vilket har lösningen $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$, $x_5 = 1$, $x_6 = 1$, och $\varphi(2) = -42$, en bättre undre gräns, $\underline{v} = -42$. Vi får subgradient $\xi = 5$, så lösningen är inte tillåten och ingen övre gräns fås. (Man kan också sätta $x_3 = 1$, men då får vi samma lösning som för $u = 1$.)

$\bar{u} = 3$ ger $\varphi(3) = \min 2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_5 + x_6 - 39$ då $x \in \{0, 1\}$, vilket har lösningen

$x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$, $x_6 = 0$, och $\varphi(3) = -41$, en bättre undre gräns, $\underline{v} = -41$. Vi får subgradient $\xi = -11 < 0$, så lösningen är tillåten och ger övre gräns -8. (Man kan också sätta $x_4 = 1$, vilket ger $\xi = -8$ och övre gräns -17.)

$\bar{u} = 4$ ger $\varphi(4) = \min 6x_1 + 2x_3 + 3x_4 + 5x_5 + 6x_6 - 52$ då $x \in \{0, 1\}$, vilket har lösningen $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$, $x_6 = 0$, och $\varphi(4) = -52$, vilket inte ger en bättre undre gräns. Vi får subgradient $\xi = -13 < 0$, så lösningen är tillåten, men ger en sämre övre gräns (0). (Man kan också sätta $x_2 = 1$, vilket ger subgradient $\xi = -11$ och övre gränsen -8.)

Vi har nu $-41 \leq v^* \leq -8$. Gränserna visar inte att vi har funnit optimum.

2c: Vi vill alltså att minimering av $(4u - 10)x_1 + (2u - 8)x_2 + (u - 2)x_3 + (3u - 9)x_4 + (4u - 11)x_5 + (5u - 14)x_6$ ska ge lösningen $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$, $x_5 = 1$, $x_6 = 0$. Detta kräver att $(4u - 10) \leq 0$, $(2u - 8) \leq 0$, $(u - 2) \geq 0$, $(3u - 9) \leq 0$, $(4u - 11) \leq 0$, $(5u - 14) \geq 0$, dvs. $u \leq 10/4 = 2.5$, $u \leq 8/2 = 4$, $u \geq 2$, $u \leq 9/3 = 3$, $u \leq 11/4 = 2.75$, $u \geq 14/5 = 2.8$, vilket ger $u \geq 2.8$ och $u \leq 2.5$, vilket inte har någon lösning. Vi har alltså inte styrbarhet.

Uppgift 3

3a: Dantzig-Wolfe: Subproblemet återfinnes ovan (men med $0 \leq x \leq 1$ istället för $x \in \{0, 1\}$, vilket inte gör någon skillnad). Masterproblemet blir (utan konstanten 30)

$$
\begin{array}{ll}
\max & q \\
\text{då} & q \leq -10x_1^{(l)} - 8x_2^{(l)} - 2x_3^{(l)} - 9x_4^{(l)} - 11x_5^{(l)} - 14x_6^{(l)} + \\
& \qquad u(4x_1^{(l)} + 2x_2^{(l)} + x_3^{(l)} + 3x_4^{(l)} + 4x_5^{(l)} + 5x_6^{(l)} - 13) \ \text{ för alla } l \\
& u \geq 0
\end{array}
$$

Metoden itererar mellan subproblemet och masterproblemet. Subproblemet löses för givna värden på u, och ger en undre gräns, $\varphi(\bar{u})$, samt en ny lösning, $x^{(l)}$, till masterproblemet. Masterproblemet löses med alla kända $x^{(l)}$, och ger en övre gräns, samt nytt $\bar{u}$ till subproblemet. Metoden avslutas då den undre gränsen är lika med den övre. Då läser man ut den duala lösningen, λ, till masterproblemet, och skapar den optimala lösningen som $\sum_l \lambda_l x^{(l)}$.

3b: Punkten (1, 1, 1, 1, 1, 1) ger snitt: $q \leq -54 + 6u$.
Punkten (1, 1, 0, 1, 1, 1) ger snitt: $q \leq -52 + 5u$.
Punkten (0, 1, 0, 0, 0, 0) ger snitt: $q \leq -8 - 11u$.
Punkten (0, 0, 0, 0, 0, 0) ger snitt: $q \leq -13u$.

Masterproblemet blir alltså

$$
\begin{array}{rll}
v_{DM} = \max & q & \\
\text{då} & q \leq -54 + 6u & (1) \\
& q \leq -52 + 5u & (2) \\
& q \leq -8 - 11u & (3) \\
& q \leq -13u & (4) \\
& u \geq 0 &
\end{array}
$$

Snitt 2 och 3 är aktiva i maximum, som fås i $u = 11/4 = 2.75$, med $q = -153/4 = -38.25$. Vi får alltså $\bar{v} = v_{DM} = -38.25$. Vi har tidigare fått $\underline{v} = -41$, så $-41 \leq v^* \leq -38.25$.

3c: $\bar{u} = 2.75$ ger $\varphi(2.75) = \min x_1 - 2.5x_2 + 0.75x_3 - 0.75x_4 - 0.25x_6 - 35.75$ då $x \in \{0,1\}$, vilket har lösningen $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$, $x_5 = 0$, $x_6 = 1$, och $\varphi(2.75) = -39.25$, en bättre undre gräns, $\underline{v} = -39.25$. Vi har nu $-39.25 \le v^* \le -38.25$.

Snittet från denna lösning blir: $q \le -31 - 3u$. Om man adderar detta snitt (5) till masterproblemet och löser det, fås att snitt 2 och 5 är aktiva i optimum. Detta ger $u = 21/8 = 2.625$, samt $q = -311/8 = -38.875$, vilket ger övre gräns -38.875. Vi har nu $-39.25 \le v^* \le -38.875$.

LP-dualen av masterproblemet blir

$$\begin{array}{ll} v_{DM} = \min & -54\lambda_1 - 52\lambda_2 - 8\lambda_3 - 31\lambda_5 \\ \text{då} & -6\lambda_1 - 5\lambda_2 + 11\lambda_3 + 13\lambda_4 + 3\lambda_5 \ge 0 \\ & \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 = 1 \\ & \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5 \ge 0 \end{array}$$

Komplementaritet ger via inaktiva snitt $\lambda_1 = 0$, $\lambda_3 = 0$ och $\lambda_4 = 0$. Eftersom $u > 0$, får vi $-5\lambda_2 + 3\lambda_5 = 0$, som tillsammans med $\lambda_2 + \lambda_5 = 1$ ger $\lambda_2 = 3/8 = 0.375$ och $\lambda_5 = 5/8 = 0.625$. Den optimala primala lösningen blir då $x = \lambda_2 x^{(2)} + \lambda_5 x^{(5)} = 3(1,1,0,1,1,1)/8 + 5(0,1,0,1,0,1)/8 = (3,8,0,8,3,8)/8 = (0.375,1,0,1,0.375,1)$.
(Extrakoll: Insättning ger att bivillkoret är uppfyllt med likhet.)
Lösning av LP-problemet (via LP-dualen) ger en något annorlunda lösning: $x = (0,1,0,1,0.75,1)$, vilket beror på att vi inte riktigt löst färdigt problemet. (Gränserna sammanfaller inte helt.)

3c: I första iterationen (i uppgift b) har vi mastersnitten $q \le -54 + 6u$, $q \le -52 + 5u$, $q \le -8 - 11u$ och $q \le -13u$.

Vi har även undre gränsen -41, så alla u som uppfyller $-54 + 6u > -41$, $-52 + 5u > -41$, $-8 - 11u > -41$ och $-13u > -41$ kan ge en högre undre gräns. Detta ger $6u > 13$, $5u > 11$, $11u < 33$ och $13u < 41$, dvs. $u > 13/6 \approx 2.167$, $u > 11/5 = 2.2$, $u < 3$ och $u < 41/13 \approx 3.154$. Så vi ser att u strikt mellan 2.2 och 3 är bra nog. Optimalt var ju 2.75, men man kan också ta t.ex. 2.6 som ligger i mitten av intervallet.

Om man stoppar in $u = 2.6$ i masterproblemet i första iterationen fås
$q \le -38.4$, $q \le -39$, $q \le -36.6$, $q \le -33.8$.
Eftersom dessa värden alla är större än -41, kan en högre undre gräns fås.

Uppgift 4

4a: Modell:

$$\begin{array}{llcl} v^* = \min & -10x_1 - 8x_2 - 2x_3 - 9x_4 - 11x_5 - 14x_6 + 3y_1 + 6y_2 + 9y_3 & & \\ \text{då} & 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 4x_5 + 5x_6 - 3y_1 - 5y_2 - 8y_3 & \le & 13 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 & \le & 1 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 & \ge & 0 \\ & y_i & \in & \{0,1\} \ \forall i \end{array}$$

4b: Subproblemet (för fixerat y):

$$\begin{array}{llcl} \psi(\bar{y}) = \min & -10x_1 - 8x_2 - 2x_3 - 9x_4 - 11x_5 - 14x_6 & + & 3\bar{y}_1 + 6\bar{y}_2 + 9\bar{y}y_3 \\ \text{då} & 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 4x_5 + 5x_6 & \le & 13 + 3\bar{y}_1 + 5\bar{y}_2 + \bar{8}y_3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 & \le & 1 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 & \ge & 0 \end{array}$$

LP-dualen av subproblemet:

$$
\begin{array}{lrcr}
\psi(\bar{y}) = \max & (-13 - 3\bar{y}_1 - 5\bar{y}_2 - \bar{8}y_3)u_0 - u_1 - u_2 - u_3 - u_4 - u_5 - u_6 + 3\bar{y}_1 + 6\bar{y}_2 + 9\bar{y}y_3 & & \\
\text{då} & -4u_0 - u_1 & \leq & -10 \\
& -2u_0 - u_2 & \leq & -8 \\
& -u_0 - u_3 & \leq & -2 \\
& -3u_0 - u_4 & \leq & -9 \\
& -4u_0 - u_5 & \leq & -11 \\
& -5u_0 - u_6 & \leq & -14 \\
& u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6 & \geq & 0
\end{array}
$$

De duala bivillkoren kan skrivas som $U = \{u : 4u_0 + u_1 \geq 10, 2u_0 + u_2 \geq 8, u_0 + u_3 \geq 2, 3u_0 + u_4 \geq 9, 4u_0 + u_5 \geq 11, 5u_0 + u_6 \geq 14, u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6 \geq 0\}$.

Benders masterproblem:

$$
\begin{array}{ll}
\min & q \\
\text{då} & q \geq (3 - 3u_0^{(l)})y_1 + (6 - 5u_0^{(l)})y_2 + (9 - 8u_0^{(l)})y_3 \\
& \qquad -13u_0^{(l)} - u_1^{(l)} - u_2^{(l)} - u_3^{(l)} - u_4^{(l)} - u_5^{(l)} - u_6^{(l)} \quad \text{för alla } l \\
& y \in \{0, 1, 2\}
\end{array}
$$

Metoden itererar mellan subproblemet och masterproblemet. Subproblemet löses för givna värden på y, och ger en övre gräns, $h(\bar{y})$, samt en ny lösning, $u^{(l)}$, till masterproblemet. Masterproblemet löses med alla kända $u^{(l)}$, och ger en undre gräns, samt nya $\bar{y}$ till subproblemet. Metoden avslutas då den undre gränsen är lika med den övre.

4c: För $\bar{y} = (0, 0, 0)$: Primalt:
$\psi(0, 0, 0) = \min -10x_1 - 8x_2 - 2x_3 - 9x_4 - 11x_5 - 14x_6$ då $4x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 4x_5 + 5x_6 \leq 13, 0 \leq x \leq 1$
Den primala lösningen till det kontinuerliga kappsäcksproblemet med $b = 13$ blir som följer: $x_2 = 1$, $\hat{b} = 11$, $x_4 = 1$, $\hat{b} = 8$, $x_6 = 1$, $\hat{b} = 3$, $x_5 = 0.75$, $\hat{b} = 0$, $x_1 = 0$, $\hat{b} = 0$, $x_3 = 0$, med målfunktionsvärde -39.25.

Dualen: $\psi(0, 0, 0) = \max -13u_0 - u_1 - u_2 - u_3 - u_4 - u_5 - u_6$ då $u \in U$.
Den duala lösningen blir först $u_1 = 0$, $u_3 = 0$ och $u_5 = 0$, sedan $u_0 = 2.75$, och därefter $u_2 = 2.5$, $u_4 = 0.75$. $u_6 = 0.25$. Vi har $\psi(0) = -39.25$, vilket ger $\bar{v} = -39.25$.

Benderssnittet blir $q \geq -8.25y_1 - 7.75y_2 - 13y_3 - 39.25$.

Benders masterproblem:

$$
\begin{array}{ll}
\min & q \\
\text{då} & q \geq -8.25y_1 - 7.75y_2 - 13y_3 - 39.25 \\
& y_j \in \{0, 1\} \forall j
\end{array}
$$

Den bästa lösningen är uppenbarligen $y_1 = 1$, $y_2 = 1$, $y_3 = 1$, med $q = -68, 25$. Vi har nu $-68, 25 \leq v^* \leq -39, 25$.

För $\bar{y} = (1, 1, 1)$: Primalt:
$\psi(1, 1, 1) = \min -10x_1 - 8x_2 - 2x_3 - 9x_4 - 11x_5 - 14x_6 + 18$ då $4x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 4x_5 + 5x_6 \leq 29, 0 \leq x \leq 1$
Den primala lösningen till det kontinuerliga kappsäcksproblemet med $b = 29$ blir att alla får plats, dvs. $x = (1, 1, 1, 1, 1, 1)$, med målfunktionsvärde -36.

Dualen: Kappsäcksbivilkoret är inte aktivt, så $u_0 = 0$. Resterande dualvariabler sätt så små som möjligt: $u_1 = 10$, $u_2 = 8$, $u_3 = 2$, $u_4 = 9$, $u_5 = 11$, $u_6 = 14$. Vi har

$\psi(1,1,1) = -36$, vilket inte förbättrar övre gränsen.

Benderssnittet blir $q \geq 3y_1 + 6y_2 + 9y_3 - 54$.

Benders masterproblem:

$$\begin{array}{ll} \text{min} & q \\ \text{då} & q \geq -8.25y_1 - 7.75y_2 - 13y_3 - 39.25 \\ & q \geq 3y_1 + 6y_2 + 9y_3 - 54 \\ & y_j \in \{0,1\} \forall j \end{array}$$

Den bästa lösningen är $y_1 = 1$, $y_2 = 0$, $y_3 = 0$, med $q = -47.5$. Vi har nu $-47.5 \leq v^* \leq -39,25$.

För $\bar{y} = (1,0,0)$: Primalt:
$\psi(1,0,0) = \min -10x_1 - 8x_2 - 2x_3 - 9x_4 - 11x_5 - 14x_6 + 3$ då $4x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 4x_5 + 5x_6 \leq 16, 0 \leq x \leq 1$
Den primala lösningen till det kontinuerliga kappsäcksproblemet med $b = 16$ blir som följer: $x_2 = 1$, $\hat{b} = 14$, $x_4 = 1$, $\hat{b} = 11$, $x_6 = 1$, $\hat{b} = 6$, $x_5 = 1$, $\hat{b} = 2$, $x_1 = 0.5$, $\hat{b} = 0$, $x_3 = 0$, med målfunktionsvärde -44.

Dualen: $\psi(1,0,0) = \max -16u_0 - u_1 - u_2 - u_3 - u_4 - u_5 - u_6 + 3$ då $u \in U$.
Den duala lösningen blir först $u_1 = 0$ och $u_3 = 0$, sedan $u_0 = 2.5$, och därefter $u_2 = 3$, $u_4 = 1.5$. $u_5 = 1$, $u_6 = 1.5$. Vi har $\psi(1,0,0) = -44$, vilket ger $\bar{v} = -44$.

Benderssnittet blir $q \geq -4.5y_1 - 6.5y_2 - 11y_3 - 37.5$.

Benders masterproblem:

$$\begin{array}{ll} \text{min} & q \\ \text{då} & q \geq -8.25y_1 - 7.75y_2 - 13y_3 - 39.25 \\ & q \geq 3y_1 + 6y_2 + 9y_3 - 54 \\ & \geq -4.5y_1 - 6.5y_2 - 11y_3 - 37.5 \\ & y_j \in \{0,1\} \forall j \end{array}$$

Den bästa lösningen är nu $y_1 = 1$, $y_2 = 1$, $y_3 = 0$, med $q = -45$. Vi har nu $-45 \leq v^* \leq -44$.

Den bästa lösningen vi funnit är $y_1 = 1$, $y_2 = 1$, $y_3 = 0$, samt $x_1 = 0.5$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$, $x_5 = 1$, $x_6 = 1$, med $z = -44$. Lösningen är högst 1 från optimum. Svar i ord: Ta lån 1 och 2.

Uppgift 5

5a: En buss: Noderna 2, 3, 6 och 10 har udda valens. Dubblering av bågarna (2,4), (3,4), (6,8) och (8,10) är billigaste sättet att ge alla noder jämn valens. Kostnaden för turen blir $155 + 28 = 183$. Tiden blir 183, och fasta kostnaden 20. Målfunktionsvärdet blir då $183 + 183 + 20 = 386$.

5b: Två bussar: Förslag på uppdelning:
Buss 1: Tur 1-3-5-6-4-3-4-11-2-4-2-1. Kostnad: 91. Tid: 91.
Buss 2: Tur 9-10-12-8-10-8-6-5-8-5-7-9. Kostnad: 106. Tid: 106.
Fast kostnad: 40. Maxtid: 106. Målfunktionsvärdet blir $91 + 106 + 40 + 106 = 343$.

5c: Tre bussar: Förslag på uppdelning:

Buss 1: Tur 1-3-4-11-2-4-2-1. Kostnad: 64. Tid: 64.
Buss 2: Tur 7-9-10-12-8-10-9-7. Kostnad: 58. Tid: 58.
Buss 3: Tur 3-5-7-5-8-6-5-6-4-3. Kostnad: 79. Tid: 79.
Fast kostnad: 60. Maxtid: 79. Målfunktionsvärdet blir nu $64+58+79+60+79 = 340$.

5d: Totala kostnaden blir lägst för tre bussar.

5e: Med ovanstående turer fås följande kostnader, med f som fast kostnad:
En buss: $366 + f$.
Två bussar: $303 + 2f$.
Tre bussar: $280 + 3f$.

En buss är bäst om $366 + f \leq 303 + 2f$ och $366 + f \leq 280 + 3f$, vilket ger $f \geq 63$ och $f \geq 43$, dvs. om f är minst 63.

Två bussar är bäst om $366 + f \geq 303 + 2f$ och $303 + 2f \leq 280 + 3f$, vilket ger $f \leq 63$ och $f \geq 23$, dvs. om f ligger mellan 23 och 63.

Tre bussar är bäst om $366 + f \geq 280 + 3f$ och $303 + 2f \geq 280 + 3f$, vilket ger $f \leq 43$ och $f \leq 23$, dvs. om f är högst 23.

(Detta gäller för de turer vi hittat.)

Uppgift 6

6a: Finn billigaste väg från nod 1 med Dijkstras metod. Den ger som bekant billigaste väg till alla noder.
Väg till nod 3: 1-8-2-3, kostnad: 25.
Väg till nod 4: 1-8-10-6-4, kostnad: 30.
Väg till nod 5: 1-8-10-12-5, kostnad: 29.
Kostnaderna ovan anger tiden för transporten.

6b: Om en väg ska innehålla max två noder, plus start- och slutnod, får den innehålla max tre bågar. Det betyder att högst tre x-variabler får vara lika med ett. Ett bivillkor som garanterar detta är helt enkelt att summan av alla x inte får överstiga 3: $\sum_{i,j} x_{ij} \leq 3$.

Om detta bivillkor relaxeras blir Lagrangefunktionen $\sum_{ij} c_{ij}x_{ij} + u(\sum_{ij} x_{ij} - 3) = \sum_{ij}(c_{ij} + u)x_{ij} - 3u$. Det betyder att kostnaden på varje båge i grafen ökas med u. Lagrangerelaxationen blir då $\varphi(u) = \min_{x \in V(1,5)} \sum_{ij}(c_{ij}+u)x_{ij} - 3u$, och är ett normalt billigaste vägproblem, lösbart med Dijkstras metod.

För $u = 0$ fås vägen i uppgift a, 1-8-10-12-5, med kostnad $\varphi(0) = 29$. Detta ger en undre gräns på 29. En subgradient fås som antal bågar i vägen minus 3, $\xi = 4 - 3 = 1 > 0$. En positiv subgradient betyder att lösningen inte är tillåten (vi får ingen övre gräns), samt att man bör öka u.

För $u = 1$ fås samma billigaste väg, nu med kostnad 33, vilket ger $\varphi(1) = 33 - 3 = 30$, vilket ger en högre undre gräns på 30. Subgradienten blir $\xi = 1 > 0$, så lösningen är inte är tillåten (vi får ingen övre gräns), och vi bör öka u.

För $u = 2$ fås billigaste väg 1-11-9-5, med kostnad 37, vilket ger $\varphi(2) = 37 - 6 = 31$, vilket ger en högre undre gräns på 31. Vägen innehåller bara 3 bågar, så den är tillåten. Subgradienten blir noll, vilket indikerar att vi inte vill ändra u. Kostnaden för vägen i ursprungskostnaderna är 31, vilket blir en övre gräns.

Vi har en undre gräns lika med 31 och en övre lika med 31, så detta är optimum.

6c: Dijkstras metod ger ju billigaste väg till alla noder, så vi har redan löst vissa subproblem. Vi behöver bara nysta upp från olika slutnoder.

För väg 1-3: För $u = 0$ fås vägen i uppgift a, 1-8-2-3, med kostnad $\varphi(0) = 25$. Detta ger en undre gräns på 25. Subgradienten blir $\xi = 3 - 3 = 0$. Vi har alltså en tillåten lösning, och kostnaden 25 är därmed också en övre gräns, vilket indikerar optimum.

För väg 1-4: För $u = 0$ fås vägen i uppgift a, 1-8-10-6-4, med kostnad $\varphi(0) = 30$. Detta ger en undre gräns på 30. Subgradienten blir $\xi = 4 - 3 = 1 > 0$. En positiv subgradient betyder att lösningen inte är tillåten (vi får ingen övre gräns), samt att man bör öka u.

För $u = 1$ fås samma billigaste väg, nu med kostnad 34, vilket ger $\varphi(1) = 34 - 3 = 31$, vilket ger en högre undre gräns på 31. Subgradienten blir $\xi = 1 > 0$, så lösningen är inte är tillåten (vi får ingen övre gräns), och vi bör öka u.

Detta upprepas för $u = 2, 3, 4, 5, 6$. Vi får samma väg. Kostnaden för vägen, v, ökar med 4 i varje steg, vilket medför att den undre gränsen $\varphi(u) = v - 3u$ ökar med 1 i varje steg. För $u = 6$ har vi en undre gräns lika med 36.

För $u = 7$ fås billigaste väg 1-3-4, med kostnad 57, vilket ger $\varphi(7) = 57 - 21 = 36$, vilket ger samma undre gräns som $u = 6$. Vägen innehåller bara 3 bågar, så den är tillåten. Subgradienten blir noll, vilket indikerar att vi inte vill ändra u. Kostnaden för vägen i ursprungskostnaderna är 43, vilket blir en övre gräns. Den övre gränsen verifierar inte optimalitet, men en subgradient lika med noll verifierar att vi nått maximum av den duala funktionen.

Kan man ändra u i större steg? Till nod 4 kan man bara komma från nod 6 och nod 3. Från nod 1 kan man gå till nod 8 och nod 3. (Att gå till nod 11 lär inte kunna minska antalet bågar i vägen.) Eftersom nod 8 och nod 6 ingår i vägen redan för $u = 0$, och en kortare väg mellan nod 8 och nod 6 inte finns, så är frågan helt enkelt hur mycket vi måste öka u för att nod 3 ska ingå i billigaste vägen.

Vägen från nod 1 till nod 4 via nod 3, 1-3-4, kostar $43 + 2u$, medan vägen 1-8-10-6-4 kostar $30 + 4u$. Vägen via nod 3 blir billigare om $43 + 2u \leq 30 + 4u$, dvs. om $u \geq 6.5$. Vi kunde alltså ha ökat u så mycket direkt. (Notera dock att detta inte är ett vattentätt bevis.)