Tekniska Högskolan i Linköping
Matematiska Institutionen
Optimeringslära
Kaj Holmberg

Optimering av realistiska sammansatta system
Lösning till tentamen
2021-08-24

Lösningar/svar

Uppgift 1

1a: Variabeldefinition: $x_j = 1$ om beställning j genomförs, 0 om inte.

max $z = 3x_1 + 7x_2 + 8x_3 + 4x_4 + 9x_5$
då $\quad 5x_1 + 8x_2 + 10x_3 + 3x_4 + 6x_5 \leq 14$
$x_j \in \{0, 1\}$ för $j = 1, 2, 3, 4, 5$

1b: Indata: c_k : värde, a_k : vikt.
Definitioner:
Tillstånd: s_k = vikt för de k första förslagen.
Styrning: $x_k = 1$ om beställning k genomförs, 0 om inte.
Överföringsfunktion: $s_{k-1} = s_k - a_k x_k$.
Målfunktion: $f_k(s_k) = \max_{x_k}(c_k x_k + f_{k-1}(s_{k-1}))$.
$0 \leq s_k \leq 14$ för alla k. $s_0 \geq 0$, $s_6 = 14$. $f_0(s_0) = 0$.

1c:

Iteration 1:

$x_1 \backslash s_1$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	-	-	-	-	-	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
$f_1(s_1)$	0	0	0	0	0	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
$\hat{x}_1(s_1)$	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	

Iteration 2:

$x_2 \backslash s_2$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
0	0	0	0	0	0	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
1	-	-	-	-	-	-	-	-	7	7	7	7	7	10	10
$f_2(s_2)$	0	0	0	0	0	3	3	3	7	7	7	7	7	10	10
$\hat{x}_2(s_2)$	0	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	

Iteration 3:

$x_3 \backslash s_3$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
0	0	0	0	0	0	3	3	3	7	7	7	7	7	10	10
1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	8	8	8	8	8
$f_3(s_3)$	0	0	0	0	0	3	3	3	7	7	8	8	8	10	10
$\hat{x}_3(s_3)$	0	0	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	

Iteration 4:

$x_4 \backslash s_4$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
0	0	0	0	0	0	3	3	3	7	7	8	8	8	10	10
1	-	-	-	4	4	4	4	4	7	7	7	11	11	12	12
$f_4(s_4)$	0	0	0	4	4	4	4	4	7	7	8	11	11	12	12
$\hat{x}_4(s_4)$	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	

Iteration 5:

$x_5 \backslash s_5$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
0	0	0	0	4	4	4	4	4	7	7	8	11	11	12	12
1	-	-	-	-	-	-	9	9	9	13	13	13	13	13	16
$f_5(s_5)$	0	0	0	4	4	4	9	9	9	13	13	13	13	13	16
$\hat{x}_5(s_5)$	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	

Uppnystning: $s_5 = 14$, $x_5 = 1$, $s_4 = 8$, $x_4 = 0$, $s_3 = 8$, $x_3 = 0$, $s_2 = 8$, $x_2 = 1$, $s_1 = 0$, $x_1 = 0$, $s_0 = 0$. $z = 16$.
Svar i ord: Utför beställningarna 2 och 5. Det ger vinst på 16.

1e: Högerledet ändras då till 13.

Uppnystning: $s_5 = 13$, $x_5 = 1$, $s_4 = 7$, $x_4 = 1$, $s_3 = 4$, $x_3 = 0$, $s_2 = 4$, $x_2 = 0$, $s_1 = 4$, $x_1 = 0$, $s_0 = 4$. $z = 13$.
Svar i ord: Utför beställning 4 och 5. Det ger vinst på 13.

Uppgift 2

2a: Subproblem (Lagrangerelaxation):
$\varphi(\bar{u}) = \min -3x_1 - 7x_2 - 8x_3 - 4x_4 - 9x_5 + u(5x_1 + 8x_2 + 10x_3 + 3x_4 + 6x_5 - 13) =$
$(5u - 3)x_1 + (8u - 7)x_2 + (10u - 8)x_3 + (3u - 4)x_4 + (6u - 9)x_5 - 13u$
då $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in \{0, 1\}$

F.ö. se kurslitteraturen.

2b: $\bar{u} = 0$ ger $\varphi(0) = \min -3x_1 - 7x_2 - 8x_3 - 4x_4 - 9x_5$ då $x \in \{0, 1\}$,
vilket har lösningen $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 1$, $x_5 = 1$, och $\varphi(1) = -31$, vilket ger $\underline{v} = -31$. Subgradient: $\xi = 19 > 0$ så lösningen är inte tillåten och ingen övre gräns fås.

$\bar{u} = 0.8$ ger $\varphi(0.8) = \min x_1 - 0.6x_2 - 1.6x_4 - 4.2x_5 - 10.4$ då $x \in \{0, 1\}$, vilket har lösningen $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$, $x_5 = 1$, och $\varphi(0.8) = -16.8$, en bättre undre gräns, $\underline{v} = -16.8$. Vi får subgradient $\xi = 4$, så lösningen är inte tillåten och ingen övre gräns fås.

$\bar{u} = 1$ ger $\varphi(1) = \min 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 - 3x_5 - 13$ då $x \in \{0, 1\}$, vilket har lösningen $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$, $x_5 = 1$, och $\varphi(3) = -17$, inte en bättre undre gräns. Vi får subgradient $\xi = -4 < 0$, så lösningen är tillåten och ger övre gräns -13.

$\bar{u} = 1.4$ ger $\varphi(1.4) = \min 4x_1 + 4.2x_2 + 6x_3 + 0.2x_4 - 0.6x_5 - 18.2$ då $x \in \{0, 1\}$, vilket har lösningen $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = 1$, och $\varphi(4) = -18.8$, vilket inte ger en bättre undre gräns. Vi får subgradient $\xi = -7 < 0$, så lösningen är tillåten, men ger en sämre övre gräns (-9).

Vi har nu $-16.8 \le v^* \le -13$. Gränserna visar inte att vi har funnit optimum.

2c: Vi vill alltså att minimering av $(5u-3)x_1+(8u-7)x_2+(10u-8)x_3+(3u-4)x_4+(6u-9)x_5$ ska ge lösningen $x_1=0$, $x_2=0$, $x_3=0$, $x_4=1$, $x_5=1$, Detta kräver att $(5u-3)\ge 0$, $(8u-7)\ge 0$, $(10u-8)\ge 0$, $(3u-4)\le 0$, $(6u-9)\le 0$, dvs. $u \ge 3/5 = 0.6$, $u \ge 7/8 = 0.875$, $u \ge 8/10 = 0.8$, $u \le 4/3 \approx 1.33$, $u \le 9/6 = 1.5$, vilket ger $u \ge 0.875$ och $u \le 1.33$, vilket t.ex. uppfylles av $u = 1$.

Uppgift 3

3a: Dantzig-Wolfe: Subproblemet återfinnes ovan (men med $0 \le x \le 1$ istället för $x \in \{0,1\}$, vilket inte gör någon skillnad). Masterproblemet blir (utan konstanten 30)

$$\begin{array}{ll}
\max & q \\
\text{då} & q \le -3x_1^{(l)} - 7x_2^{(l)} - 8x_3^{(l)} - 4x_4^{(l)} - 9x_5^{(l)} + \\
& \qquad u(5x_1^{(l)} + 8x_2^{(l)} + 10x_3^{(l)} + 3x_4^{(l)} + 6x_5^{(l)} - 13) \;\; \text{för alla } l \\
& u \ge 0
\end{array}$$

Metoden itererar mellan subproblemet och masterproblemet. Subproblemet löses för givna värden på u, och ger en undre gräns, $\varphi(\bar{u})$, samt en ny lösning, $x^{(l)}$, till masterproblemet. Masterproblemet löses med alla kända $x^{(l)}$, och ger en övre gräns, samt nytt $\bar{u}$ till subproblemet. Metoden avslutas då den undre gränsen är lika med den övre. Då läser man ut den duala lösningen, λ, till masterproblemet, och skapar den optimala lösningen som $\sum_l \lambda_l x^{(l)}$.

3b: Punkten (1, 1, 1, 1, 1) ger snitt: $q \le -31 + 19u$.
Punkten (0, 1, 0, 1, 1) ger snitt: $q \le -20 + 4u$.
Punkten (0, 0, 0, 1, 1) ger snitt: $q \le -13 - 4u$.
Punkten (0, 0, 0, 0, 1) ger snitt: $q \le -9 - 7u$.

Masterproblemet blir alltså

$$\begin{array}{rll}
v_{DM} = \max & q & \\
\text{då} & q \le -31 + 19u & (1) \\
& q \le -20 + 4u & (2) \\
& q \le -13 - 4u & (3) \\
& q \le -9 - 7u & (4) \\
& u \ge 0 &
\end{array}$$

Snitt 2 och 3 är aktiva i maximum, som fås i $u = 7/8 = 0.875$, med $q = -16.5$. Vi får alltså $\bar{v} = v_{DM} = -16.5$. Vi har tidigare fått $\underline{v} = -16.8$, så $-16.8 \le v^* \le -16.5$.

$\bar{u} = 0.875$ ger $\varphi(0.875) = \min 1.375x_1 + 0.75x_3 - 1.375x_4 - 3.75x_5 - 11.375$ då $x \in \{0,1\}$, vilket har lösningen $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$, $x_5 = 1$, och $\varphi(2.75) = -16.5$, en bättre undre gräns, $\underline{v} = -16.5$. Vi har nu $-16.5 \le v^* \le -16.5$, så övre och undre gräns är lika, och problemet är löst.

LP-dualen av masterproblemet blir

$$\begin{array}{rl}
v_{DM} = \min & -31\lambda_1 - 20\lambda_2 - 13\lambda_3 - 9\lambda_4 \\
\text{då} & -19\lambda_1 - 4\lambda_2 + 4\lambda_3 + 7\lambda_4 \ge 0 \\
& \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1 \\
& \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \ge 0
\end{array}$$

Komplementaritet ger via inaktiva snitt $\lambda_1 = 0$ och $\lambda_4 = 0$. Eftersom $u > 0$, får vi $-4\lambda_2 + 4\lambda_3 = 0$, som tillsammans med $\lambda_2 + \lambda_3 = 1$ ger $\lambda_2 = 0.5$ och $\lambda_3 = 0.5$. Den optimala primala lösningen blir då $x = \lambda_2 x^{(2)} + \lambda_3 x^{(3)} = 0.5(0,1,0,1,1) + 0.5(0,0,0,1,1) = (0, 0.5, 0, 1, 1)$.
(Extrakoll: Insättning ger att bivillkoret är uppfyllt med likhet.)

Uppgift 4

4a: Modell:

$$
\begin{array}{rlrcl}
v^* = \min & -3x_1 - 7x_2 - 8x_3 - 4x_4 - 9x_5 + 5y_1 + 10y_2 & & & \\
\text{då} & 5x_1 + 8x_2 + 10x_3 + 3x_4 + 6x_5 - 2y_1 - 5y_2 & & \leq & 13 \\
& & y_1 + y_2 & \leq & 1 \\
& & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 & \leq & 1 \\
& & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 & \geq & 0 \\
& & y_i & \in & \{0,1\} \ \forall i
\end{array}
$$

4b: Subproblemet (för fixerat y):

$$
\begin{array}{rlrcl}
\psi(\bar{y}) = \min & -3x_1 - 7x_2 - 8x_3 - 4x_4 - 9x_5 + 5\bar{y}_1 + 10\bar{y}_2 & & & \\
\text{då} & 5x_1 + 8x_2 + 10x_3 + 3x_4 + 6x_5 \leq 13 + 2\bar{y}_1 + 5\bar{y}_2 & & & \\
& & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 & \leq & 1 \\
& & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 & \geq & 0
\end{array}
$$

LP-dualen av subproblemet:

$$
\begin{array}{rlcr}
\psi(\bar{y}) = \max & (-13 - 2\bar{y}_1 - 5\bar{y}_2)u_0 - u_1 - u_2 - u_3 - u_4 - u_5 + 5\bar{y}_1 + 10\bar{y}_2 & & \\
\text{då} & -5u_0 - u_1 & \leq & -3 \\
& -8u_0 - u_2 & \leq & -7 \\
& -10u_0 - u_3 & \leq & -8 \\
& -3u_0 - u_4 & \leq & -4 \\
& -6u_0 - u_5 & \leq & -9 \\
& u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 & \geq & 0
\end{array}
$$

De duala bivillkoren kan skrivas som $U = \{u : 5u_0 + u_1 \geq 3, 8u_0 + u_2 \geq 7, 10u_0 + u_3 \geq 8, 3u_0 + u_4 \geq 4, 6u_0 + u_5 \geq 9, u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 \geq 0\}$.

Benders masterproblem:

$$
\begin{array}{ll}
\min & q \\
\text{då} & q \geq (5 - 2u_0^{(l)})y_1 + (10 - 5u_0^{(l)})y_2 \\
& \qquad -13u_0^{(l)} - u_1^{(l)} - u_2^{(l)} - u_3^{(l)} - u_4^{(l)} - u_5^{(l)} \ \text{ för alla } l \\
& y_1 + y_2 \qquad leq \quad 1 \\
& y \in \{0,1\}
\end{array}
$$

Metoden itererar mellan subproblemet och masterproblemet. Subproblemet löses för givna värden på y, och ger en övre gräns, $h(\bar{y})$, samt en ny lösning, $u^{(l)}$, till masterproblemet. Masterproblemet löses med alla kända $u^{(l)}$, och ger en undre gräns, samt nya $\bar{y}$ till subproblemet. Metoden avslutas då den undre gränsen är lika med den övre.

4c: För $\bar{y} = (0,0)$: Primalt:
$\psi(0,0) = \min -3x_1 - 7x_2 - 8x_3 - 4x_4 - 9x_5$ då $5x_1 + 8x_2 + 10x_3 + 3x_4 + 6x_5 \leq 13$
$0 \leq x \leq 1$
Den primala lösningen till det kontinuerliga kappsäcksproblemet med $b = 13$ blir som

följer: $x_5 = 1$, $\hat{b} = 7$, $x_4 = 1$, $\hat{b} = 5$, $x_2 = 4/8 = 0.5$, $\hat{b} = 0$, $x_3 = 0$, $\hat{b} = 0$, $x_1 = 0$, med målfunktionsvärde -16.5.

Dualen: $\psi(0,0) = \max -13u_0 - u_1 - u_2 - u_3 - u_4 - u_5 - u_6$ då $u \in U$.
Den duala lösningen blir $u_0 = 0.875$, samt $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, $u_3 = 0$, $u_4 = 1.375$ och $u_45 = 3.75$. Vi får $\bar{v} = -16.5$.

Benderssnittet blir $q \geq -16.5$.

Benders masterproblem:

$$\begin{array}{ll} \min & q \\ \text{då} & q \geq -16.5 \\ & y_1 + y_2 \qquad leq \quad 1 \\ & y_j \in \{0,1\} \forall j \end{array}$$

Den bästa lösningen är inte unik, vi kan t.ex. ta $y_1 = 0$, $y_2 = 0$. Alla optimallösningar har dock $q = -16.5$. Vi har nu $-16.5 \leq v^* \leq -16.5$, så övre gräns är lika med undre gräns, och metoden avslutas.

Den bästa lösningen vi funnit är $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, samt resten av lösningen från upgift 1d. Svar i ord: Hyr inget släp.

Uppgift 5

Se kurslitteraturen.

Uppgift 6

6a: En maskin: Noderna 4 och 6 har udda valens. Dubblering av båge (4,6) är billigaste sättet att ge alla noder jämn valens. Kostnaden för turen blir $72 + 6 = 78$. Tiden blir 78, och fasta kostnaden 10. Målfunktionsvärdet blir då $78 + 78 + 10 = 166$.

6b: Två maskiner: Förslag på uppdelning:
Maskin 1: Tur 2-3-5-4-2. Kostnad: 35. Tid: 35.
Maskin 2: Tur 1-4-6-4-7-6-1. Kostnad: 43. Tid: 43.
Fast kostnad: 20. Maxtid: 43. Målfunktionsvärdet blir $35 + 43 + 20 + 43 = 141$.

6c: Tre maskiner: Förslag på uppdelning:
Maskin 1: Tur 2-3-5-4-2. Kostnad: 35. Tid: 35.
Maskin 2: Tur 1-4-6-1. Kostnad: 21. Tid: 21.
Maskin 3: Tur 4-7-6-4. Kostnad: 22. Tid: 22.
Fast kostnad: 30. Maxtid: 35. Målfunktionsvärdet blir nu $35+21+22+30+35 = 143$.

6d: Totala kostnaden blir lägst för två maskiner.

6e: Med ovanstående turer fås följande kostnader, med f som fast kostnad:
En maskin: $156 + f$.
Två maskiner: $121 + 2f$.
Tre maskiner: $113 + 3f$.

En maskin är bäst om $156 + f \leq 121 + 2f$ och $156 + f \leq 113 + 3f$, vilket ger $35 \leq f$ och $21.5 \leq f$, dvs. om $f \geq 35$.

Två maskiner är bäst om $121 + 2f \leq 156 + f$ $121 + 2f \leq 113 + 3f$, vilket ger $f \leq 35$ och $8 \leq f$, dvs. om $8 \leq f \leq 35$.

Tre maskiner är bäst om $113+3f \leq 156+f$ och $113+3f \leq 121+2f$, vilket ger $2f \leq 43$ och $f \leq 8$, dvs. om $f \leq 8$.

(Detta gäller för de turer vi hittat.)

Uppgift 7

7a: Extra bivillkoret: $x_{14} + x_{24} + x_{45} + x_{46} + x_{47} \leq 3$. Subgradient $\xi = x_{14} + x_{24} + x_{45} + x_{46} + x_{47} - 3$.

Lagrangerelaxation: $\varphi(u) = \min_{x \in T} 9x_{12} + 6_{14} + 9x_{16} + 5x_{24} + 10x_{23} + 7x_{35} + 8x_{45} + 5x_{46} + 8x_{47} + 6x_{57} + 11x_{67} + u(x_{14} + x_{24} + x_{45} + x_{46} + x_{47} - 3) = 9x_{12} + (6+u)_{14} + 9x_{16} + (5+u)x_{24} + 10x_{23} + 7x_{35} + (8+u)x_{45} + (5+u)x_{46} + (8+u)x_{47} + 8x_{57} + 11x_{67} - 3u$.

7b: $u = 0$: MST: $\varphi(0) = 37$, $\xi = 1 > 0$. $\underline{z} = 37$. Öka u.

$u = 1$: MST: $\varphi(0) = 41 - 3 = 38$, $\xi = 1 > 0$. $\underline{z} = 38$. Öka u.

$u = 2$: MST: $\varphi(0) = 45 - 6 = 39$, $\xi = 0$. $\underline{z} = 39$. $\bar{z} = 39$.

$u = 3$: MST: $\varphi(0) = 48 - 9 = 39$, $\xi = -1 < 0$. $\underline{z} = 39$. $\bar{z} = 39$.

Nu är både undre och övre gräns lika med 39, så optimum är funnet. Optimum är den primala lösning som fås för $u = 2$.

7c: Om lösningen inte är tillåten, går för många bågar till nod 4. Om man ökar u, kommer kostnaden för alla bågar som går till nod 4 att ökas lika mycket. Antag att båge A först kommer att åka ut ur lösningen. Då kommer en annan båge, B, in i lösningen, som inte ansluter till nod 4. B bildar en cykel med bågar i trädet, bland annat A. Ändringen av u måste då vara så stor att A och B får samma kostnad. Finns det flera möjligheter, är det det som ger minst u som gäller.

Man behöver då studera alla cykler genom nod 4, och räkna ut skillnaden mellan den dyraste bågen i trädet och den billigaste bågen utanför trädet.

I detta fall är lösningen inte unik, trädet kan innehålla (4,5) eller (4,7) som kostar lika mycket. Då får vi beakta båda fallen.

Till slut hittar vi cykeln 4-2-3-5-4, där det bara skiljer 2 mellan dyraste bågen i trädet och den billigaste bågen utanför trädet. Så att öka u till 2 bör räcka.