Tekniska Högskolan i Linköping	Optimering av realistiska sammansatta system
Matematiska Institutionen	Lösning till tentamen
Optimeringslära	2022-01-12
Kaj Holmberg	

Lösningar/svar

Uppgift 1

1a: Variabeldefinition: $x_j = 1$ om parti j inte ingår i regeringen, 0 om det gör det.

max $z = 3x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 + 4x_6 + x_7$
då $\quad 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + 2x_7 \leq 7$
$x_j \in \{0, 1\}$ för $j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$

(Jag tar med x_1, och förutsätter att vi automatiskt får $x_1 = 0$.)

1b: Indata: c_k : värde, a_k : vikt.
Definitioner:
Tillstånd: s_k = vikt för de k första förslagen.
Styrning: $x_k = 1$ om parti k ska lämnas utanför regeringen, 0 om inte.
Överföringsfunktion: $s_{k-1} = s_k - a_k x_k$.
Målfunktion: $f_k(s_k) = \max_{x_k}(c_k x_k + f_{k-1}(s_{k-1}))$.
$0 \leq s_k \leq 7$ för alla k. $s_0 \geq 0$, $s_6 = 7$. $f_0(s_0) = 0$.

1c:

Iteration 1: (egentligen onödig)

$x_1 \backslash s_1$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	-	-	-	-	-	0	0	0
$f_1(s_1)$	0	0	0	0	0	0	0	0
$\hat{x}_1(s_1)$	0	0	0	0	0	0	0	0

Iteration 2:

$x_2 \backslash s_2$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	-	-	-	3	3	3	3	3
$f_2(s_2)$	0	0	0	3	3	3	3	3
$\hat{x}_2(s_2)$	0	0	0	1	1	1	1	1

Iteration 3:

$x_3 \backslash s_3$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	3	3	3	3	3
1	-	-	1	1	1	4	4	4
$f_3(s_3)$	0	0	1	3	3	4	4	4
$\hat{x}_3(s_3)$	0	0	1	0	0	1	1	1

Iteration 4:

$x_4 \backslash s_4$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	1	3	3	4	4	4
1	-	2	2	3	5	5	6	6
$f_4(s_4)$	0	2	2	3	5	5	6	6
$\hat{x}_4(s_4)$	0	1	1	0	1	1	1	1

Iteration 5:

$x_5 \backslash s_5$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	2	2	3	5	5	6	6
1	-	1	3	3	4	6	6	7
$f_5(s_5)$	0	2	3	3	5	6	6	7
$\hat{x}_5(s_5)$	0	0	1	0	0	1	0	1

Iteration 6:

$x_6 \backslash s_6$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	2	3	3	5	6	6	7
1	-	4	6	7	7	9	10	10
$f_6(s_6)$	0	4	6	7	7	9	10	10
$\hat{x}_6(s_6)$	0	1	1	1	1	1	1	1

Iteration 7:

$x_7 \backslash s_7$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	4	6	7	7	9	10	10
1	-	-	1	5	7	8	8	10
$f_7(s_7)$	0	4	6	7	7	9	10	10
$\hat{x}_7(s_7)$	0	0	0	0	0	0	0	0

Uppnystning: $s_7 = 7$, $x_7 = 0$, $s_6 = 7$, $x_1 = 1$, $s_5 = 6$, $x_5 = 0$, $s_4 = 6$, $x_4 = 1$, $s_3 = 5$, $x_3 = 1$, $s_2 = 3$, $x_2 = 1$, $s_1 = 0$, $x_1 = 0$, $s_0 = 0$. $z = 10$.
Svar i ord: Ta inte med parti B, C, D, F i regeringen, dvs. ta med parti A, E och G i regeringen. Det ger målfunktionsvärde 10.

1e: Högerledet ändras då till 6.

Uppnystning: $s_7 = 6$ $x_7 = 0$, $s_6 = 6$, $x_1 = 1$, $s_5 = 5$, $x_5 = 1$, $s_4 = 4$, $x_4 = 1$, $s_3 = 3$, $x_3 = 0$, $s_2 = 3$, $x_2 = 1$, $s_1 = 0$, $x_1 = 0$, $s_0 = 0$. $z = 10$.
Svar i ord: Ta inte med parti B, D, E, F i regeringen, dvs. ta med parti A, C och G i regeringen. Det ger målfunktionsvärde 10.

Uppgift 2

2a: Subproblem (Lagrangerelaxation):
$\varphi(\bar{u}) = \min -3x_2 - x_3 - 2x_4 - x_5 - 4x_6 - x_7 + u(5x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + 2x_7 - 7) =$
$5ux_1 + (3u-3)x_2 + (2u-1)x_3 + (1u-2)x_4 + (1u-1)x_5 + (1u-4)x_6 + (2u-1)x_7 - 7u$
då $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \in \{0, 1\}$

F.ö. se kurslitteraturen.

2b: $\bar{u} = 0$ ger $\varphi(0) = \min -3x_2 - x_3 - 2x_4 - x_5 - 4x_6 - x_7$ då $x \in \{0, 1\}$,
vilket har lösningen $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 1$, $x_5 = 1$, $x_6 = 1$, $x_7 = 1$, och

$\varphi(1) = -12$, vilket ger $\underline{v} = -12$. Subgradient: $\xi = 3 > 0$ så lösningen är inte tillåten och ingen övre gräns fås.

$\bar{u} = 0.4$ ger $\varphi(0.4) = \min 2x_1 - 1.8x_2 - 0.2x_3 - 1.6x_4 - 0.6x_5 - 3.6x_6 - 0.2x_7 - 2.8$ då $x \in \{0,1\}$, vilket har lösningen $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 1$, $x_5 = 1$, $x_6 = 1$, $x_7 = 1$, och $\varphi(0.4) = -10.8$, en bättre undre gräns, $\underline{v} = -10.8$. Vi får subgradient $\xi = 3 > 0$, så lösningen är inte tillåten och ingen övre gräns fås.

$\bar{u} = 1.1$ ger $\varphi(1.1) = \min 5.5x_1 + 0.3x_2 + 1.2x_3 - 0.9x_4 + 0.1x_5 - 2.9x_6 + 1.2x_7 - 7.7$ då $x \in \{0,1\}$, vilket har lösningen $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$, $x_5 = 0$, $x_6 = 1$, $x_7 = 0$, och $\varphi(1.1) = -11.5$, inte en bättre undre gräns. Vi får subgradient $\xi = -5 < 0$, så lösningen är tillåten och ger övre gräns -6.

Vi har nu $-10.8 \le v^* \le -6$. Gränserna visar inte att vi har funnit optimum.

2c: Vi vill alltså att minimering av $5ux_1 + (3u-3)x_2 + (2u-1)x_3 + (1u-2)x_4 + (1u-1)x_5 + (1u-4)x_6 + (2u-1)x_7$ ska ge lösningen $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 1$, $x_5 = 0$, $x_6 = 1$, $x_7 = 0$, Detta kräver att $5u \ge 0$, $(3u-3) \le 0$, $(2u-1) \le 0$, $(1u-2) \le 0$, $(1u-1) \ge 0$, $(1u-4) \le 0$, $(2u-1) \ge 0$, dvs. $u \ge 0$, $u \le 3/3 = 1$, $u \le 1/2 = 0.5$, $u \le 2$, $u \ge 1$, $u \le 4$, $u \ge 1/2 = 0.5$, vilket ger $u \ge 1$ och $u \le 0.5$, vilket inte kan uppfyllas av något u.

Uppgift 3

3a: Dantzig-Wolfe: Subproblemet återfinnes ovan (men med $0 \le x \le 1$ istället för $x \in \{0,1\}$, vilket inte gör någon skillnad). Masterproblemet blir

$$\begin{array}{ll} \max & q \\ \text{då} & q \le -3x_2^{(l)} - x_3^{(l)} - 2x_4^{(l)} - x_5^{(l)} - 4x_6^{(l)} - x_7^{(l)} + \\ & \qquad u(5x_1^{(l)} + 3x_2^{(l)} + 2x_3^{(l)} + x_4^{(l)} + x_5^{(l)} + x_6^{(l)} + 2x_7^{(l)} - 7) \ \text{ för alla } l \\ & u \ge 0 \end{array}$$

Metoden itererar mellan subproblemet och masterproblemet. Subproblemet löses för givna värden på u, och ger en undre gräns, $\varphi(\bar{u})$, samt en ny lösning, $x^{(l)}$, till masterproblemet. Masterproblemet löses med alla kända $x^{(l)}$, och ger en övre gräns, samt nytt $\bar{u}$ till subproblemet. Metoden avslutas då den undre gränsen är lika med den övre. Då läser man ut den duala lösningen, λ, till masterproblemet, och skapar den optimala lösningen som $\sum_l \lambda_l x^{(l)}$.

3b: Punkten (0 1 1 1 1 1 1) ger snitt: $q \le -12 + 3u$.
Punkten (0 0 0 1 0 1 0) ger snitt: $q \le -6 - 5u$.

Masterproblemet blir alltså

$$\begin{array}{rlr} v_{DM} = \max & q & \\ \text{då} & q \le -12 + 3u & (1) \\ & q \le -6 - 5u & (2) \\ & u \ge 0 & \end{array}$$

Snitt 1 och 2 är aktiva i maximum, som fås i $u = 3/4 = 0.75$, med $q = -9.75$. Vi får alltså $\bar{v} = v_{DM} = -9.75$. Vi har tidigare fått $\underline{v} = -10.8$, så $-10.8 \le v^* \le -9.75$.

$\bar{u} = 0.75$ ger $\varphi(0.75) = \min 3.75x_1 - 0.75x_2 + 0.5x_3 - 1.25x_4 - 0.25x_5 - 3.25x_6 + 0.5x_7 -$

5.25 då $x \in \{0,1\}$, vilket har lösningen $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$, $x_5 = 1$, $x_6 = 1$, $x_7 = 0$, och $\varphi(0.75) = -10.75$, en bättre undre gräns. $\underline{v} = -10.75$. Vi har nu $-10.75 \leq v^* \leq -9.75$. Snittet blir $q \leq -10 - u$.

Masterproblemet blir alltså

$$
\begin{array}{lll}
v_{DM} = \max & q & \\
\text{då} & q \leq -12 + 3u & (1) \\
& q \leq -6 - 5u & (2) \\
& q \leq -10 - u & (3) \\
& u \geq 0 &
\end{array}
$$

Snitt 1 och 3 är aktiva i maximum, som fås i $u = 1/2 = 0.5$, med $q = -10.5$. Vi får alltså $\bar{v} = v_{DM} = -10.5$. Vi har nu $-10.75 \leq v^* \leq -10.5$.

$\bar{u} = 0.5$ ger $\varphi(0.5) = \min 2.5x_1 - 1.5x_2 - 1.5x_4 - 0.5x_5 - 3.5x_6 - 3.5$ då $x \in \{0,1\}$, vilket har lösningen $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$, $x_5 = 1$, $x_6 = 1$, $x_7 = 0$, och $\varphi(0.5) = -10.5$, en bättre undre gräns. $\underline{v} = -10.5$. Vi har nu $-10.5 \leq v^* \leq -10.5$, så övre och undre gräns är lika, och problemet är löst.

LP-dualen av masterproblemet blir

$$
\begin{array}{ll}
v_{DM} = \min & -12\lambda_1 - 6\lambda_2 - 10\lambda_3 \\
\text{då} & -3\lambda_1 + 5\lambda_2 + \lambda_3 \geq 0 \\
& \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \\
& \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0
\end{array}
$$

Komplementaritet ger via inaktiva snitt $\lambda_2 = 0$. Eftersom $u > 0$, får vi $-3\lambda_1 + \lambda_3 = 0$, som tillsammans med $\lambda_1 + \lambda_3 = 1$ ger $\lambda_1 = 0.25$ och $\lambda_3 = 0.75$. Den optimala primala lösningen blir då $x = \lambda_1 x^{(1)} + \lambda_3 x^{(3)} = 0.25(0,1,1,1,1,1,1) + 0.75(0,1,0,1,1,1,0) = (0,1,0.25,1,1,1,0.25)$.
(Extrakoll: Insättning ger att bivillkoret är uppfyllt med likhet.)

Uppgift 4

4a: Modell:

$$
\begin{array}{llcl}
v^* = \min & -3x_2 - x_3 - 2x_4 - x_5 - 4x_6 - x_7 + 0.3y & & \\
\text{då} & 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + 2x_7 - y & \leq & 7 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 & \leq & 1 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 & \geq & 0 \\
& y & \in & \{0,1,2\} \; \forall i
\end{array}
$$

4b: Subproblemet (för fixerat y):

$$
\begin{array}{llcl}
\psi(\bar{y}) = \min & -3x_2 - x_3 - 2x_4 - x_5 - 4x_6 - x_7 + 0.3\bar{y} & & \\
\text{då} & 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + 2x_7 & \leq & 7 + \bar{y} \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 & \leq & 1 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 & \geq & 0
\end{array}
$$

LP-dualen av subproblemet:

$$
\begin{array}{lrcr}
\psi(\bar{y}) = \max & (-7-\bar{y})u_0 - u_1 - u_2 - u_3 - u_4 - u_5 - u_6 - u_7 + 0.3\bar{y} & & \\
\text{då} & -5u_0 - u_1 & \leq & 0 \\
 & -3u_0 - u_2 & \leq & -3 \\
 & -2u_0 - u_3 & \leq & -1 \\
 & -u_0 - u_4 & \leq & -2 \\
 & -u_0 - u_5 & \leq & -1 \\
 & -u_0 - u_6 & \leq & -4 \\
 & -2u_0 - u_7 & \leq & -1 \\
 & u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7 & \geq & 0
\end{array}
$$

De duala bivillkoren kan skrivas som $U = \{u : 5u_0 + u_1 \geq 0, 3u_0 + u_2 \geq 3, 2u_0 + u_3 \geq 1, u_0 + u_4 \geq 2, u_0 + u_5 \geq 1, u_0 + u_6 \geq 4, 2u_0 + u_7 \geq 1, u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7 \geq 0\}$.

Benders masterproblem:

$$
\begin{array}{ll}
\min & q \\
\text{då} & q \geq (0.3 - u_0^{(l)})y - 7u_0^{(l)} - u_1^{(l)} - u_2^{(l)} - u_3^{(l)} - u_4^{(l)} - u_5^{(l)} - u_6^{(l)} - u_7^{(l)} \quad \text{för alla } l \\
 & y \in \{0, 1, 2\}
\end{array}
$$

Metoden itererar mellan subproblemet och masterproblemet. Subproblemet löses för givna värden på y, och ger en övre gräns, $h(\bar{y})$, samt en ny lösning, $u^{(l)}$, till masterproblemet. Masterproblemet löses med alla kända $u^{(l)}$, och ger en undre gräns, samt nya $\bar{y}$ till subproblemet. Metoden avslutas då den undre gränsen är lika med den övre.

4c: För $\bar{y} = 0$: Primalt:
$\psi(0) = \min -3x_2 - x_3 - 2x_4 - x_5 - 4x_6 - x_7$ då $5x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + 2x_7 \leq 7$
$0 \leq x \leq 1$
Den primala lösningen till det kontinuerliga kappsäcksproblemet med $b = 7$ blir som följer: $x_6 = 1$, $\hat{b} = 6$, $x_4 = 1$, $\hat{b} = 5$, $x_2 = 1$, $\hat{b} = 2$, $x_5 = 1$, $\hat{b} = 1$, $x_3 = 0.5$, $\hat{b} = 0$, $x_7 = 0$, $\hat{b} = 0$, $x_1 = 0$, med målfunktionsvärde -10.5.

Den duala lösningen blir $u_0 = 0.5$, samt $u_1 = 0$, $u_3 = 0$, $u_7 = 0$, $u_2 = 1.5$, $u_4 = 1.5$, $u_5 = 0.5$ och $u_6 = 3.5$. Vi får $\bar{v} = -10.5$.

Benderssnittet blir $q \geq -0.2y - 10.5$.

Benders masterproblem:

$$
\begin{array}{ll}
\min & q \\
\text{då} & q \geq -0.2y - 10.5 \\
 & y \in \{0, 1, 2\}
\end{array}
$$

Optimum får för $y = 2$, med $q = -10.9$, vilket ger $\underline{v} = -10.9$. Vi har nu $-10.9 \leq v^* \leq -10.5$,

För $\bar{y} = 2$: Primalt:
$\psi(2) = \min -3x_2 - x_3 - 2x_4 - x_5 - 4x_6 - x_7 + 0.6$ då $5x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + 2x_7 \leq 9$
$0 \leq x \leq 1$
Den primala lösningen till det kontinuerliga kappsäcksproblemet med $b = 9$ blir som följer: $x_6 = 1$, $\hat{b} = 8$, $x_4 = 1$, $\hat{b} = 7$, $x_2 = 1$, $\hat{b} = 4$, $x_5 = 1$, $\hat{b} = 3$, $x_3 = 1$, $\hat{b} = 1$, $x_7 = 0.5$, $\hat{b} = 0$, $x_1 = 0$, med målfunktionsvärde -10.9.

Vi har nu $-10.9 \leq v^* \leq -10.9$, så övre gräns är lika med undre gräns, och metoden avslutas.

Den bästa lösningen är alltså $y = 2$. Svar i ord: Muta två ledamöter.

4d: x-lösningen betyder att parti A plus halva parti G ska sitta med i regeringen. Dock kan man ju inte ha med ett halvt parti, så lösningen är inte genomförbar. För en genomförbar lösning krävs heltalskrav på x-variablerna. Det kan man dock inte ha i Bendersdekomposition eftersom vi utnyttjar LP-dualitet i subproblemet. Så denna svårighet kan inte övervinnas (om man använder Bendersdekomposition).

Uppgift 5

Se kurslitteraturen.

Uppgift 6

6a: En maskin: Noderna 3, 5, 6 och 7 har udda valens. Dubblering av bågarna (3,5) och (6,7) är billigaste sättet att ge alla noder jämn valens. Kostnaden för turen blir $82 + 14 = 96$. Tiden blir 96, och fasta kostnaden 10. Målfunktionsvärdet blir då $96 + 96 + 10 = 202$.

6b: Två maskiner: Förslag på uppdelning:
Maskin 1: Tur 1-6-7-4-6-4-1. Kostnad: 45. Tid: 45.
Maskin 2: Tur 2-3-5-7-5-4-3-4-2. Kostnad: 57. Tid: 57.
Fast kostnad: 20. Maxtid: 57. Målfunktionsvärdet blir $45 + 57 + 57 + 20 = 179$.

6c: Tre maskiner: Förslag på uppdelning:
Maskin 1: Tur 2-3-5-3-4-2. Kostnad: 31. Tid: 31.
Maskin 2: Tur 4-5-7-6-7-4. Kostnad: 41. Tid: 41.
Maskin 3: Tur 4-1-6-4. Kostnad: 24. Tid: 24.
Fast kostnad: 30. Maxtid: 41. Målfunktionsvärdet blir nu $31+41+24+41+30 = 167$.

6d: Totala kostnaden blir lägst för tre maskiner.

6e: Med ovanstående turer fås följande kostnader, med f som fast kostnad:
En maskin: $192 + f$.
Två maskiner: $159 + 2f$.
Tre maskiner: $137 + 3f$.

En maskin är bäst om $192 + f \leq 159 + 2f$ och $192 + f \leq 137 + 3f$, vilket ger $33 \leq f$ och $27.5 \leq f$, dvs. om $f \geq 33$.

(Detta gäller för de turer vi hittat.)

Uppgift 7

7a: Extra bivillkoret: $x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{45} + x_{46} + x_{47} \leq 3$. Subgradient $\xi = x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{45} + x_{46} + x_{47} - 3$.

Lagrangerelaxation: $\varphi(u) = \min_{x \in T} 7_{14} + 11x_{16} + 7x_{23} + 9x_{24} + 5x_{34} + 5x_{35} + 8x_{45} + 6x_{46} + 6x_{47} + 9x_{57} + 9x_{67} + u(x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{45} + x_{46} + x_{47} - 3) = (7+u)_{14} + 11x_{16} + 7x_{23} + (9+u)x_{24} + (5+u)x_{34} + 5x_{35} + (8+u)x_{45} + (6+u)x_{46} + (6+u)x_{47} + 9x_{57} + 9x_{67} - 3u$.

7b: $u = 0$: MST: $\varphi(0) = 36$, $\xi = 1 > 0$. $\underline{z} = 36$. Öka u.

$u = 1$: MST: $\varphi(1) = 40 - 3 = 37$, $\xi = 1 > 0$. $\underline{z} = 37$. Öka u.

$u = 2$: MST: $\varphi(2) = 44 - 6 = 38$, $\xi = 1 > 0$. $\underline{z} = 38$. Öka u.

$u = 3$: MST: $\varphi(3) = 48 - 9 = 39$, $\xi = -1 < 0$. $\underline{z} = 39$. $\bar{z} = 39$.

Nu är både undre och övre gräns lika med 39, så optimum är funnet. Optimum är den primala lösning som fås för $u = 3$.

7c: Om lösningen inte är tillåten, går för många bågar till nod 4. Om man ökar u, kommer kostnaden för alla bågar som går till nod 4 att ökas lika mycket. Antag att båge A först kommer att åka ut ur lösningen. Då kommer en annan båge, B, in i lösningen, som inte ansluter till nod 4. B bildar en cykel med bågar i trädet, bland annat A. Ändringen av u måste då vara så stor att A och B får samma kostnad. Finns det flera möjligheter, är det det som ger minst u som gäller.

Man behöver då studera alla cykler genom nod 4, och räkna ut skillnaden mellan den dyraste bågen i trädet och den billigaste bågen utanför trädet som inte ansluter till nod 4.

Det finns flera cykler som ger minsta $u = 3$, t.ex. 4-6-7-4. Så att öka u till 3 bör räcka.