Tekniska Högskolan i Linköping
Matematiska Institutionen
Optimeringslära
Kaj Holmberg

Optimering av realistiska sammansatta system
Lösning till tentamen
2022-03-16

Lösningar/svar

Uppgift 1

1a: Variabeldefinition: $x_j = 1$ om innehållet i container j tas med, 0 om inte.

max $z = 8x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 9x_4$
då $3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 6$
$x_j \in \{0, 1\}$ för $j = 1, 2, 3, 4$

1b: Indata: c_k : värde, a_k : vikt.
Definitioner:
Tillstånd: s_k = vikt för de k första förslagen.
Styrning: $x_k = 1$ om innehållet i container k ska tas med, 0 om inte.
Överföringsfunktion: $s_{k-1} = s_k - a_k x_k$.
Målfunktion: $f_k(s_k) = \max_{x_k}(c_k x_k + f_{k-1}(s_{k-1}))$.
$0 \leq s_k \leq 6$ för alla k. $s_0 \geq 0$, $s_4 = 6$. $f_0(s_0) = 0$.

1c:

Iteration 1:

$x_1 \backslash s_1$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	-	-	-	8	8	8	8
$f_1(s_1)$	0	0	0	8	8	8	8
$\hat{x}_1(s_1)$	0	0	0	1	1	1	1

Iteration 2:

$x_2 \backslash s_2$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	8	8	8	8
1	-	-	5	5	5	13	13
$f_2(s_2)$	0	0	5	8	8	13	13
$\hat{x}_2(s_2)$	0	0	1	0	0	1	1

Iteration 3:

$x_3 \backslash s_3$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	5	8	8	13	13
1	-	-	3	3	8	11	11
$f_3(s_3)$	0	0	5	8	8	13	13
$\hat{x}_3(s_3)$	0	0	0	0	0	0	0

Iteration 4:

$x_4 \backslash s_4$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	5	8	8	13	13
1	-	9	9	14	17	17	22
$f_4(s_4)$	0	9	9	14	17	17	22
$\hat{x}_4(s_4)$	0	1	1	1	1	1	1

Uppnystning: $s_4 = 6$, $x_4 = 1$, $s_3 = 5$, $x_3 = 0$, $s_2 = 5$, $x_2 = 1$, $s_1 = 3$, $x_1 = 1$, $s_0 = 0$. $z = 22$.
Svar i ord: Ta med innehållet i container 1, 2 och 4. Det ger målfunktionsvärde 22.

1d: Högerledet ändras då till 5. Uppnystning: $s_4 = 5$, $x_4 = 1$, $s_3 = 4$, $x_3 = 0$, $s_2 = 4$, $x_2 = 0$, $s_1 = 4$, $x_1 = 1$, $s_0 = 1$. $z = 17$.
Svar i ord: Ta med innehållet i container 1 och 4. Det ger målfunktionsvärde 17. Försämringen blev för stor, gör inte så.

Uppgift 2

2a: Subproblem (Lagrangerelaxation):
$\varphi(\bar{u}) = \min -8x_1 - 5x_2 - 3x_3 - 9x_4 + u(3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 1x_4 - 6)$
$= (3u-8)x_1 + (2u-5)x_2 + (2u-3)x_3 + (u-9)x_4 - 6u$
då $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0,1\}$

F.ö. se kurslitteraturen.

2b: $\bar{u} = 0$ ger $\varphi(0) = \min -8x_1 - 5x_2 - 3x_3 - 9x_4$ då $x \in \{0,1\}$,
vilket har lösningen $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 1$, och $\varphi(1) = -25$, vilket ger $\underline{v} = -25$. Subgradient: $\xi = 2 > 0$ så lösningen är inte tillåten och ingen övre gräns fås.

$\bar{u} = 2$ ger $\varphi(2) = \min -2x_1 - x_2 + x_3 - 7x_4 - 12$ då $x \in \{0,1\}$, vilket har lösningen $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$, och $\varphi(2) = -22$, en bättre undre gräns, $\underline{v} = -22$. Vi får subgradient $\xi = 0$, så lösningen är tillåten och ger övre gräns -22.

$\bar{u} = 3$ ger $\varphi(3) = \min x_1 + x_2 + 3x_3 - 6x_4 - 18$ då $x \in \{0,1\}$, vilket har lösningen $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$, och $\varphi(3) = -24$, inte en bättre undre gräns. Vi får subgradient $\xi = -5 < 0$, så lösningen är tillåten, men målfunktionsvärdet är -9, vilket är en sämre övre gräns.

Vi har nu $-22 \leq v^* \leq -22$, vilket visar att vi har funnit optimum för $u = 2$. Vi noterar även att $\xi = 0$ för $u = 2$, vilket betyder att vi har bra styrbarhet, och motsvarande x-lösning är optimal.

2c: Vi vill alltså att minimering av $(3u-8)x_1 + (2u-5)x_2 + (2u-3)x_3 + (u-9)x_4$ ska ge lösningen $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$. Detta kräver att $(3u-8) \leq 0$, $(2u-5) \leq 0$, $(2u-3) \geq 0$, $(u-9) \leq 0$, dvs. $u \leq 8/3 \approx 2.33$, $u \leq 5/2 = 2.5$, $u \geq 3/2 = 1.5$, $u \leq 9$, vilket ger $u \geq 1.5$ och $u \leq 2.33$, vilket bland annat uppfylls av $u = 2$.

Uppgift 3

3a: Dantzig-Wolfe: Subproblemet återfinnes ovan (men med $0 \leq x \leq 1$ istället för $x \in \{0,1\}$, vilket inte gör någon skillnad). Masterproblemet blir

$$\begin{array}{ll} \max & q \\ \text{då} & q \leq -8x_1^{(l)} - 5x_2^{(l)} - 3x_3^{(l)} - 9x_4 + u(3x_1^{(l)} + 2x_2^{(l)} + 2x_3^{(l)} + x_4^{(l)} - 6) \;\; \text{för alla } l \\ & u \geq 0 \end{array}$$

Metoden itererar mellan subproblemet och masterproblemet. Subproblemet löses för givna värden på u, och ger en undre gräns, $\varphi(\bar{u})$, samt en ny lösning, $x^{(l)}$, till masterproblemet. Masterproblemet löses med alla kända $x^{(l)}$, och ger en övre gräns, samt nytt $\bar{u}$ till subproblemet. Metoden avslutas då den undre gränsen är lika med den övre. Då läser man ut den duala lösningen, λ, till masterproblemet, och skapar den optimala lösningen som $\sum_l \lambda_l x^{(l)}$.

3b: $u = 0$ ger $x = (1,1,1,1)$ vilket ger snitt: $q \leq -25 + 2u$.
$u = 2$ ger $x = (1,1,0,1)$ vilket ger snitt: $q \leq -22$.
$u = 3$ ger $x = (0,0,0,1)$ vilket ger snitt: $q \leq -9 - 5u$.

Masterproblemet blir alltså

$$
\begin{aligned}
v_{DM} = \max \quad & q \\
\text{då} \quad & q \leq -25 + 2u \quad (1) \\
& q \leq -22 \quad\quad\quad\; (2) \\
& q \leq -9 - 5u \quad\;\; (3) \\
& u \geq 0
\end{aligned}
$$

Optimalt värde, $q = -22$, fås för valfritt u mellan 1.5 och 2.6. Jag väljer $u = 1.5$. Vi får alltså $\bar{v} = v_{DM} = -22$. (Vi har tidigare fått $\underline{v} = -22$, men inte i denna uppgift, så jag fortsätter.)

$\bar{u} = 1.5$ ger $\varphi(1.5) = \min -3.5x_1 - 2x_2 - 7.5x_4 - 9$ då $x \in \{0, 1\}$, vilket har lösningen $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$ (eller 1), $x_4 = 1$, och $\varphi(1.5) = -22$, vilket ger undre gräns. $\underline{v} = -22$. Vi har nu $-22 \leq v^* \leq -22$, så övre och undre gräns är lika, och problemet är löst.

LP-dualen av masterproblemet blir

$$
\begin{aligned}
v_{DM} = \min \quad & -25\lambda_1 - 22\lambda_2 - 9\lambda_3 \\
\text{då} \quad & -2\lambda_1 + 5\lambda_3 \geq 0 \\
& \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \\
& \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

Komplementaritet ger via inaktiva snitt (för $u = 1.5$) $\lambda_3 = 0$. Eftersom $u > 0$, får vi $-2\lambda_1 = 0$, dvs. $\lambda_1 = 0$. Nu återstår bara $\lambda_2 = 1$. Den optimala primala lösningen blir då $x = \lambda_2 x^{(2)} = (1, 1, 0, 1)$. (Extrakoll: Insättning ger att bivillkoret är uppfyllt med likhet.)

Uppgift 4

4a: Modell:

$$
\begin{aligned}
v^* = \min \quad & -8x_1 - 5x_2 - 3x_3 - 9x_4 + y \\
\text{då} \quad & 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 6 + y \\
& x_1, x_2, x_3, x_4 \leq 1 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \\
& y \in \{0, 1, 2\} \; \forall i
\end{aligned}
$$

4b: Subproblemet (för fixerat y):

$$
\begin{aligned}
\psi(\bar{y}) = \min \quad & -8x_1 - 5x_2 - 3x_3 - 9x_4 + \bar{y} \\
\text{då} \quad & 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 6 + \bar{y} \\
& x_1, x_2, x_3, x_4 \leq 1 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{aligned}
$$

LP-dualen av subproblemet:

$$
\begin{aligned}
\psi(\bar{y}) = \max \quad & (-6 - \bar{y})u_0 - u_1 - u_2 - u_3 - u_4 + \bar{y} \\
\text{då} \quad & -3u_0 - u_1 \leq -8 \\
& -2u_0 - u_2 \leq -5 \\
& -2u_0 - u_3 \leq -3 \\
& -u_0 - u_4 \leq -9 \\
& u_0, u_1, u_2, u_3, u_4 \geq 0
\end{aligned}
$$

De duala bivillkoren kan skrivas som $U = \{u : 3u_0 + u_1 \geq 8, 2u_0 + u_2 \geq 5, 2u_0 + u_3 \geq 3, u_0 + u_4 \geq 9, u_0, u_1, u_2, u_3, u_4 \geq 0\}$.

Benders masterproblem:

$$\begin{array}{ll} \min & q \\ \text{då} & q \geq (1-u_0^{(l)})y - 6u_0^{(l)} - u_1^{(l)} - u_2^{(l)} - u_3^{(l)} - u_4^{(l)} \;\; \text{för alla } l \\ & y \in \{0,1,2\} \end{array}$$

Metoden itererar mellan subproblemet och masterproblemet. Subproblemet löses för givna värden på y, och ger en övre gräns, $h(\bar{y})$, samt en ny lösning, $u^{(l)}$, till masterproblemet. Masterproblemet löses med alla kända $u^{(l)}$, och ger en undre gräns, samt nya $\bar{y}$ till subproblemet. Metoden avslutas då den undre gränsen är lika med den övre.

4c: För $\bar{y} = 0$: Primalt:
$\psi(0) = \min -8x_1 - 5x_2 - 3x_3 - 9x_4$ då $3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 6, 0 \leq x \leq 1$
Den primala lösningen till det kontinuerliga kappsäcksproblemet med $b = 6$ blir som följer: $x_4 = 1$, $\hat{b} = 5$, $x_1 = 1$, $\hat{b} = 2$, $x_2 = 1/2 = 1$, $\hat{b} = 0$, $x_3 = 0$, $\hat{b} = 0$, med målfunktionsvärde -22.

Dualen: $\psi(0) = \max -6u_0 - u_1 - u_2 - u_3 - u_4 - u_5 - u_6$ då $u \in U$.
Den duala lösningen blir $u_0 = 1.5$, samt $u_3 = 0$, $u_1 = 3.5$, $u_2 = 2$ och $u_4 = 7.5$. Vi får $\bar{v} = -22$.

Benderssnittet blir $q \geq -0.5y - 22$.

Benders masterproblem:

$$\begin{array}{ll} \min & q \\ \text{då} & q \geq -0.5y - 22 \\ & y \in \{0,1,2\} \forall j \end{array}$$

Den bästa lösningen är $y = 2$, med $q = -23$. Vi har nu $-23 \leq v^* \leq -22$,

För $\bar{y} = 2$: Primalt:
$\psi(2) = \min -8x_1 - 5x_2 - 3x_3 - 9x_4 + 2$ då $3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 8, 0 \leq x \leq 1$
Den primala lösningen till det kontinuerliga kappsäcksproblemet med $b = 8$ blir som följer: $x_4 = 1$, $\hat{b} = 7$, $x_1 = 1$, $\hat{b} = 4$, $x_2 = 1$, $\hat{b} = 2$, $x_3 = 1$, $\hat{b} = 0$, med målfunktionsvärde -23.

Dualen: $\psi(2) = \max -8u_0 - u_1 - u_2 - u_3 - u_4 - u_5 - u_6$ då $u \in U$.
Den duala lösningen blir $u_0 = 0$, samt $u_1 = 8$, $u_2 = 5$, $u_3 = 3$ och $u_4 = 9$. Vi får $\bar{v} = -23$.

Vi har nu $-23 \leq v^* \leq -23$, så övre gräns är lika med undre gräns, och metoden avslutas.

Den bästa lösningen vi funnit är $y = 2$, och alla $x_j = 1$. Svar i ord: Sätt på en släpvagn som tar 2 ton, och ta med innehållet från alla containrar. Detta ger värdet 23.

Uppgift 5

Se kurslitteraturen.

Uppgift 6

6a: En bil: Noderna 1, 2, 5 och 6 har udda valens. Dubblering av bågarna (1,6) samt (2,4) och (4,5) är billigaste sättet (ej unikt) att ge alla noder jämn valens. Kostnaden för turen blir 93+27 = 120. Tiden blir 120, och fasta kostnaden 10. Målfunktionsvärdet blir då $120 + 120 + 10 = 250$.

6b: Två bilar: Förslag på uppdelning:
Maskin 1: Tur 1-8-2-4-6-1-4-1. Kostnad: 54. Tid: 54.
Maskin 2: Tur 2-3-5-7-6-4-5-4-2. Kostnad: 72. Tid: 72.
Fast kostnad: 20. Maxtid: 72. Målfunktionsvärdet blir $54 + 72 + 20 + 72 = 218$.

6c: Tre bilar: Förslag på uppdelning:
Maskin 1: Tur 2-3-5-4-2. Kostnad: 35. Tid: 35.
Maskin 2: Tur 2-4-1-8-2. Kostnad: 28. Tid: 28.
Maskin 3: Tur 1-6-4-5-7-6-1. Kostnad: 57. Tid: 57.
Fast kostnad: 30. Maxtid: 57. Målfunktionsvärdet blir nu $35+28+57+30+57 = 207$.

6d: Totala kostnaden blir lägst för tre bilar.

6e: Med ovanstående turer fås följande kostnader, med f som fast kostnad:
En bil: $240 + f$.
Två bilar: $198 + 2f$.
Tre bilar: $177 + 3f$.

En maskin är bäst om $240 + f \leq 198 + 2f$ och $240 + f \leq 177 + 3f$, vilket ger $42 \leq f$ och $63/2 = 31.5 \leq f$, dvs. om $f \geq 42$.

(Detta gäller för de turer vi hittat.)

Uppgift 7

7a: Extra bivillkoret: $x_{14}+x_{24}+x_{45}+x_{46} \leq 2$. Subgradient $\xi = x_{14}+x_{24}+x_{45}+x_{46}-2$.

Lagrangerelaxation: $\varphi(u) = \min_{x\in T} 9_{14} + 10x_{16} + 6x_{18} + 10x_{23} + 8x_{24} + 5x_{28} + 8x_{35} + 9x_{45} + 7x_{46} + 10x_{57} + 11x_{67} + u(x_{14} + x_{24} + x_{45} + x_{46} - 2) = (9 + u)_{14} + 10x_{16} + 6x_{18} + 10x_{23} + (8 + u)x_{24} + 5x_{28} + 8x_{35} + (9 + u)x_{45} + (7 + u)x_{46} + 10x_{57} + 11x_{67} - 2u$.

7b: $u = 0$: MST: $\varphi(0) = 53$, $\xi = 2 > 0$. $\underline{z} = 53$. Öka u.

$u = 1$: MST: $\varphi(1) = 56 - 2 = 54$, $\xi = 1 > 0$. $\underline{z} = 54$.

$u = 2$: MST: $\varphi(2) = 58 - 4 = 54$, $\xi = -1 < 0$. Tillåten lösning. $\underline{z} = 54$. $\bar{z} = 56$

$u = 3$: MST: $\varphi(3) = 59 - 6 = 53$, $\xi = -1 < 0$. $\underline{z} = 54$. $\bar{z} = 56$. Minska u.

Eftersom målfunktionsvärdet minskar när vi går från $u = 2$ till $u = 3$, har vi ökat u för mycket. Man ser också att vi har en positiv subgradient för $u = 0$ och 1, vilket indikerar att u ska ökas, och en negativ subgradient för $u = 2$ och 3, vilket indikerar att u ska minskas.

Detta betyder att optimalt u ligger mellan 1 och 2. Båda ger också samma undre gräns. (Det är dock inte säkert att det finns något u som ger bättre undre gräns.)

De bästa gränserna på det optimala målfunktionsvärdet är $54 \leq z^* \leq 56$.