Tekniska Högskolan i Linköping
Matematiska Institutionen
Optimeringslära
Kaj Holmberg

Optimering av realistiska sammansatta system
Lösning till tentamen
2023-01-11

Lösningar/svar

Uppgift 1

1a: Variabeldefinition: $x_j = 1$ om sak j ska vara på, 0 om den ska vara av.

max $z = 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 3x_5 + 3x_6$
då $\quad 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 3x_5 + 4x_6 \leq 7$
$x_j \in \{0, 1\}$ för $j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

1b: Indata: c_k : värde, a_k : kostnad.
Definitioner:
Tillstånd: s_k = kostand för de k första sakerna.
Styrning: $x_k = 1$ om sak k är på, 0 om inte.
Överföringsfunktion: $s_{k-1} = s_k - a_k x_k$.
Målfunktion: $f_k(s_k) = \max_{x_k}(c_k x_k + f_{k-1}(s_{k-1}))$.
$0 \leq s_k \leq 7$ för alla k. $s_0 \geq 0$, $s_6 = 7$. $f_0(s_0) = 0$.

1c:

Iteration 1:

$x_1 \backslash s_1$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	-	-	3	3	3	3	3	3
$f_1(s_1)$	0	0	3	3	3	3	3	3
$\hat{x}_1(s_1)$	0	0	1	1	1	1	1	1

Iteration 2:

$x_2 \backslash s_2$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	3	3	3	3	3	3
1	-	-	1	1	4	4	4	4
$f_2(s_2)$	0	0	3	3	4	4	4	4
$\hat{x}_2(s_2)$	0	0	0	0	1	1	1	1

Iteration 3:

$x_3 \backslash s_3$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	3	3	4	4	4	4
1	-	-	2	2	5	5	6	6
$f_3(s_3)$	0	0	3	3	5	5	6	6
$\hat{x}_3(s_3)$	0	0	0	0	1	1	1	1

Iteration 4:

$x_4 \backslash s_4$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	3	3	5	5	6	6
1	-	-	4	4	7	7	9	9
$f_4(s_4)$	0	0	4	4	7	7	9	9
$\hat{x}_4(s_4)$	0	0	1	1	1	1	1	1

Iteration 5:

$x_5 \backslash s_5$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	4	4	7	7	9	9
1	-	-	-	3	3	7	7	10
$f_5(s_5)$	0	0	4	4	7	7	9	10
$\hat{x}_5(s_5)$	0	0	0	0	0	0	0	1

Iteration 6:

$x_6 \backslash s_6$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	4	4	7	7	9	10
1	-	-	-	-	3	3	7	7
$f_4(s_4)$	0	0	4	4	7	7	9	10
$\hat{x}_4(s_4)$	0	0	0	0	0	0	0	0

Uppnystning: $s_6 = 7$, $x_6 = 0$, $s_5 = 7$, $x_5 = 1$, $s_4 = 4$, $x_4 = 1$, $s_3 = 2$, $x_3 = 0$, $s_2 = 2$, $x_2 = 0$, $s_1 = 2$, $x_1 = 1$, $s_0 = 0$. $z = 10$.
Svar i ord: Ha sakerna 1, 4 och 5 på, dvs. julbelysningen ute på framsidan, julgransbelysningen inne och julljusstakarna inne. Stäng av julbelysningen ute på baksidan, utebelysning vid taket på framsidan och direktverkande elelement i gästrummet. Detta ger målfunktionsvärde 10.

1d: Högerledet ändras då till 6.

Uppnystning: $s_6 = 6$, $x_6 = 0$, $s_5 = 6$, $x_5 = 0$, $s_4 = 6$, $x_4 = 1$, $s_3 = 4$, $x_3 = 1$, $s_2 = 2$, $x_2 = 0$, $s_1 = 2$, $x_1 = 1$, $s_0 = 0$. $z = 24$.
Svar i ord: Ha sakerna 1, 3 och 4 på, dvs. julbelysning ute på framsidan, utebelysning vid taket på framsidan och julgransbelysningen inne. Stäng av julbelysning ute på baksidan, julljusstakarna inne och direktverkande elelement i gästrummet, Det ger också målfunktionsvärde 10.

Uppgift 2

2a: Subproblem (Lagrangerelaxation):
$\varphi(\bar{u}) = \min -3x_1 - x_2 - 2x_3 - 4x_4 - 3x_5 - 3x_6 + u(2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 3x_5 + 4x_6 - 7) = (2u-3)x_1 + (2u-1)x_2 + (2u-2)x_3 + (2u-4)x_4 + (3u-3)x_5 + (4u-3)x_6 - 7u$
då $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \in \{0, 1\}$

F.ö. se kurslitteraturen.

2b: $\bar{u} = 0$ ger $\varphi(0) = \min -3x_1 - x_2 - 2x_3 - 4x_4 - 3x_5 - 3x_6$ då $x \in \{0, 1\}$,
vilket har lösningen $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 1$, $x_5 = 1$, $x_6 = 1$, och $\varphi(1) = -16$, vilket ger $\underline{v} = -16$. Subgradient: $\xi = 8 > 0$ så lösningen är inte tillåten och ingen övre gräns fås.

$\bar{u} = 0.5$ ger $\varphi(0.5) = \min -2x_1 - x_3 - 3x_4 - 1.5x_5 - x_6 - 3.5$ då $x \in \{0, 1\}$, vilket har lösningen $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 1$, $x_5 = 1$, $x_6 = 0$, och $\varphi(1) = -12$, en bättre undre gräns, $\underline{v} = -12$. Subgradient: $\xi = 6 > 0$ så lösningen är inte tillåten och ingen övre gräns fås.

$\bar{u} = 1$ ger $\varphi(1) = \min -x_1 + x_2 - 2x_4 + x_6 - 7$ då $x \in \{0, 1\}$, vilket har lösningen $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$, $x_5 = 0$, $x_6 = 0$, och $\varphi(1) = -10$, en bättre undre gräns, $\underline{v} = -10$. Subgradient: $\xi = -3 < 0$ så lösningen är tillåten, och ger övre gräns -7.

$\bar{u} = 2$ ger $\varphi(2) = \min x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_5 + 5x_6 - 14$ då $x \in \{0, 1\}$, vilket har lösningen $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$, $x_6 = 0$, och $\varphi(2) = -14$, vilket inte är en bättre undre gräns. Vi får subgradient $\xi = -7 < 0$, så lösningen är tillåten, med målfunktionsvärde 0, vilket inte är en bättre övre gräns.

Vi har nu $-7 \leq v^* \leq -10$, vilket inte visar att vi har funnit optimum. Vi noterar att $\xi > 0$ för $u = 0.5$ och $\xi < 0$ för $u = 1$, så optimalt u bör ligga mellan 0.5 och 1.

2c: Vi vill alltså att minimering av $(2u-3)x_1 + (2u-1)x_2 + (2u-2)x_3 + (2u-4)x_4 + (3u-3)x_5 + (4u-3)x_6$ ska ge lösningen $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$, $x_5 = 1$, $x_6 = 0$. Detta kräver att $(2u-3) \leq 0$, $(2u-1) \geq 0$, $(2u-2) \geq 0$, $(2u-4) \leq 0$, $(3u-3) \leq 0$, $(4u-3) \geq 0$, dvs. $u \leq 3/2 = 1.5$, $u \geq 1/2 = 0.5$, $u \geq 1$, $u \leq 4/2 = 2$, $u \leq 1$, $u \geq 3/4 = 0.75$, vilket har en enda lösning, nämligen $u = 1$.

Uppgift 3

3a: Dantzig-Wolfe: Subproblemet återfinnes ovan (men med $0 \leq x \leq 1$ istället för $x \in \{0,1\}$, vilket inte gör någon skillnad). Masterproblemet blir

$$
\begin{array}{ll}
\max & q \\
\text{då} & q \leq -3x_1^{(l)} - x_2^{(l)} - 2x_3^{(l)} - 4x_4 - 3x_5^{(l)} - 3x_6^{(l)} + \\
& \qquad u(2x_1^{(l)} + 2x_2^{(l)} + 2x_3^{(l)} + 2x_4^{(l)} + 3x_5^{(l)} + 4x_6^{(l)} - 7) \ \text{ för alla } l \\
& u \geq 0
\end{array}
$$

Metoden itererar mellan subproblemet och masterproblemet. Subproblemet löses för givna värden på u, och ger en undre gräns, $\varphi(\bar{u})$, samt en ny lösning, $x^{(l)}$, till masterproblemet. Masterproblemet löses med alla kända $x^{(l)}$, och ger en övre gräns, samt nytt $\bar{u}$ till subproblemet. Metoden avslutas då den undre gränsen är lika med den övre. Då läser man ut den duala lösningen, λ, till masterproblemet, och skapar den optimala lösningen som $\sum_l \lambda_l x^{(l)}$.

3b: $u = 0$ ger $x = (1,1,1,1,1,1)$ vilket ger snitt: $q \leq -16 + 8u$.
$u = 0.5$ ger $x = (1,0,1,1,1,0)$ vilket ger snitt: $q \leq -15 + 6u$.
$u = 1$ ger $x = (1,0,0,1,0,0)$ vilket ger snitt: $q \leq -7 - 3u$.
$u = 2$ ger $x = (0,0,0,0,0,0)$ vilket ger snitt: $q \leq -7u$.

Masterproblemet blir alltså

$$
\begin{array}{rlr}
v_{DM} = \max & q & \\
\text{då} & q \leq -16 + 8u & (1) \\
& q \leq -15 + 6u & (2) \\
& q \leq -7 - 3u & (3) \\
& q \leq -7u & (4) \\
& u \geq 0 &
\end{array}
$$

Optimum fås för $u = 8/9 \approx 0.889$, med $q = -29/3 \approx -9.667$. Vi får alltså $\bar{v} = v_{DM} = -9.667$. $\bar{u} = 0.889$ ger i subproblemet $\varphi(0.889) = \min -1.222x_1 + 0.777x_2 - 0.222x_3 - 2.222x_4 - 0.333x_5 + 0.555x_6 - 6.222$ då $x \in \{0,1\}$, vilket har lösningen $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 1$, $x_5 = 1$, $x_6 = 0$, och $\varphi(1) = -10.222$, vilket inte är en bättre undre gräns. Subgradient: $\xi = 2 > 0$ så lösningen är inte tillåten. Vi får snittet $q \leq -12 + 2u$.

Masterproblemet blir nu

$$
\begin{array}{rlr}
v_{DM} = \max & q & \\
\text{då} & q \leq -16 + 8u & (1) \\
& q \leq -15 + 6u & (2) \\
& q \leq -7 - 3u & (3) \\
& q \leq -7u & (4) \\
& q \leq -12 + 2u (5) & \\
& u \geq 0 &
\end{array}
$$

Optimum fås i skärningen av snitt 3 och 5, och blir $u = 1$, med $q = -10$. Vi får alltså $\bar{v} = v_{DM} = -10$.

Nu har vi $\underline{v} = \bar{v} = -10$, dvs. övre och undre gräns lika. Det betyder att $u = 1$ är optimalt.

LP-dualen av masterproblemet blir

$$\begin{array}{ll} v_{DM} = \min & -16\lambda_1 - 15\lambda_2 - 7\lambda_3 - 12\lambda_5 \\ \text{då} & -8\lambda_1 - 6\lambda_2 + 3\lambda_3 + 7\lambda_4 - 2\lambda_5 \geq 0 \\ & \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_3 + \lambda_3 = 1 \\ & \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5 \geq 0 \end{array}$$

Komplementaritet ger via inaktiva snitt (för $u = 1$) $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_4 = 0$. Eftersom $u > 0$, får vi $3\lambda_3 = 2\lambda_5$. Tillsammans med $\lambda_3 + \lambda_5 = 1$, ger det $\lambda_3 = 2/5$ och $\lambda_5 = 3/5$. Den optimala primala lösningen blir då $x = \lambda_3 x^{(3)} + \lambda_5 x^{(5)} = 2/5(1,0,0,1,0,0) + 3/5(1,0,1,1,1,0) = (1,0,3/5,1,3/5,0)$. (Extrakoll: Insättning ger att bivillkoret är uppfyllt med likhet.)

Uppgift 4

4a: Modell:

$$\begin{array}{lrcl} v^* = \min & -3x_1 - x_2 - 2x_3 - 4x_4 - 3x_5 - 3x_6 + y_1 + 3y_2 & & \\ \text{då} & 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 3x_5 + 4x_6 & \leq & 7 + 2y_1 + 4y_2 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 & \leq & 1 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 & \geq & 0 \\ & y_1 + y_2 & <= & 1 \\ & y_1, y_2 & \in & \{0,1\} \end{array}$$

4b: Subproblemet (för fixerat y):

$$\begin{array}{lrcl} \psi(\bar{y}) = \min & -3x_1 - x_2 - 2x_3 - 4x_4 - 3x_5 - 3x_6 + \bar{y}_1 + 3\bar{y}_2 & & \\ \text{då} & 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 3x_5 + 4x_6 & \leq & 7 + 2\bar{y}_1 + 4\bar{y}_2 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 & \leq & 1 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 & \geq & 0 \end{array}$$

LP-dualen av subproblemet:

$$\begin{array}{lrcl} \psi(\bar{y}) = \max & (-7 - 2\bar{y}_1 - 4\bar{y}_2)u_0 - u_1 - u_2 - u_3 - u_4 - u_5 - u_6 + \bar{y}_1 + 3\bar{y}_2 & & \\ \text{då} & -2u_0 - u_1 & \leq & -3 \\ & -2u_0 - u_2 & \leq & -1 \\ & -2u_0 - u_3 & \leq & -2 \\ & -2u_0 - u_4 & \leq & -4 \\ & -3u_0 - u_5 & \leq & -3 \\ & -4u_0 - u_6 & \leq & -3 \\ & u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6 & \geq & 0 \end{array}$$

De duala bivillkoren kan skrivas som $U = \{u : 2u_0 + u_1 \geq 3, 2u_0 + u_2 \geq 1, 2u_0 + u_3 \geq 2, 2u_0 + u_4 \geq 4, 3u_0 + u_5 \geq 3, 4u_0 + u_6 \geq 3, u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6 \geq 0\}$.

Benders masterproblem:

$$\begin{array}{ll} \min & q \\ \text{då} & q \geq (1 - 2u_0^{(l)})y_1 + (3 - 4u_0^{(l)})y_2 - 7u_0^{(l)} - u_1^{(l)} - u_2^{(l)} - u_3^{(l)} - u_4^{(l)} - u_5^{(l)} - u_6^{(l)} \quad \text{för alla } l \\ & y_1 + y_2 <= 1 \\ & y_1, y_2 \in \{0,1\} \end{array}$$

Metoden itererar mellan subproblemet och masterproblemet. Subproblemet löses för givna värden på y, och ger en övre gräns, $h(\bar{y})$, samt en ny lösning, $u^{(l)}$, till masterproblemet. Masterproblemet löses med alla kända $u^{(l)}$, och ger en undre gräns, samt nya $\bar{y}$ till subproblemet. Metoden avslutas då den undre gränsen är lika med den övre.

4c: För $\bar{y} = (0,0)$: Primalt:
$\psi(0) = \min -3x_1 - x_2 - 2x_3 - 4x_4 - 3x_5 - 3x_6$
då $2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 3x_5 + 4x_6 \le 7$
$0 \le x \le 1$

Den primala lösningen till det kontinuerliga kappsäcksproblemet med $b = 7$ blir som följer: $x_4 = 1$, $\hat{b} = 5$, $x_1 = 1$, $\hat{b} = 3$, $x_3 = 1$, $\hat{b} = 1$, $x_5 = 1/3$, $\hat{b} = 0$, $x_6 = 0$, $\hat{b} = 0$, $x_2 = 0$, $\hat{b} = 0$, med målfunktionsvärde -10.

Dualen: $\psi(0) = \max -7u_0 - u_1 - u_2 - u_3 - u_4 - u_5 - u_6$ då $u \in U$.
Den duala lösningen blir $u_0 = 1$, samt $u_2 = 0$, $u_5 = 0$, $u_6 = 0$, $u_1 = 1$ $u_3 = 0$, $u_4 = 2$.
Vi får $\bar{v} = -10$.

Benderssnittet blir $q \ge -y_1 - y_2 - 10$.

Benders masterproblem:

$$
\begin{array}{rl}
\min & q \\
\text{då} & q \ge -y_1 - y_2 - 10 \\
& y_1 + y_2 <= 1 \\
& y_1, y_2 \in \{0,1\}
\end{array}
$$

Den bästa lösningen är $y_1 = 1$, med $q = -11$. (Ej unik.) Vi har nu $-11 \le v^* \le -10$,

För $\bar{y} = (1,0)$: Primalt:
$\psi(1,0) = \min -3x_1 - x_2 - 2x_3 - 4x_4 - 3x_5 - 3x_6 + 1$
då $2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 3x_5 + 4x_6 \le 9$
$0 \le x \le 1$
Den primala lösningen till det kontinuerliga kappsäcksproblemet med $b = 9$ blir som följer: $x_4 = 1$, $\hat{b} = 7$, $x_1 = 1$, $\hat{b} = 5$, $x_3 = 1$, $\hat{b} = 3$, $x_5 = 1$, $\hat{b} = 0$, $x_6 = 0$, $\hat{b} = 0$, $x_2 = 0$, $\hat{b} = 0$, med målfunktionsvärde -11.

Vi har nu $-11 \le v^* \le -11$, så optimum är uppnått. Den bästa lösningen vi funnit är $y_1 = 1$, $y_2 = 0$, samt $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 1$, $x_5 = 1$, $x_6 = 0$.

Svar i ord: Välj den mindre utbyggnaden.

Uppgift 5

Se kurslitteraturen.

Uppgift 6

6a: En person: Noderna 1 och 4 har udda valens. Dubblering av bågarna (1,5) och (5,4) är billigaste sättet att ge alla noder jämn valens. Kostnaden för turen blir $60+12 = 72$. Tiden blir 72, och fasta kostnaden 10. Målfunktionsvärdet blir då $72 + 72 + 10 = 154$.

6b: Två personer: Förslag på uppdelning:
Person 1: Kostnad: 39. Tid: 39.
Person 2: Kostnad: 33. Tid: 33.
Fast kostnad: 20. Maxtid: 39. Målfunktionsvärdet blir $39 + 33 + 20 + 39 = 131$.

6c: Tre personer: Förslag på uppdelning:
Person 1: Kostnad: 25. Tid: 25.

Person 2: Kostnad: 22. Tid: 22.
Person 3: Kostnad: 25. Tid: 25.
Fast kostnad: 30. Maxtid: 25. Målfunktionsvärdet blir nu $25+22+25+30+25 = 127$.

6d: Totala kostnaden blir lägst för tre personer.

6e: Med ovanstående turer fås följande kostnader, med f som fast kostnad:
En person: $144 + f$.
Två personer: $111 + 2f$.
Tre personer: $97 + 3f$.

Två personer är bäst om $144+f \geq 111+2f$ och $111+2f \leq 97+3f$, vilket ger $33 \geq f$ och $14 \leq f$, dvs. om $14 \leq f \geq 33$.

(Detta gäller för de turer vi hittat.)

Uppgift 7

7a: Extra bivillkoret: $x_{12} + x_{23} + x_{24} + x_{25} + x_{26} \leq 2$. Subgradient $\xi = x_{12} + x_{23} + x_{24} + x_{25} + x_{26} - 2$.

Lagrangerelaxation: $\varphi(u) = \min_{x \in T} 9x_{12} + 10x_{15} + 7x_{16} + 7x_{23} + 7x_{24} + 6x_{25} + 5x_{26} + 8x_{36} + 4x_{47} + 5x_{57} + u(x_{12} + x_{23} + x_{24} + x_{25} + x_{26} - 2) = (9+u)x_{12} + 10x_{15} + 7x_{16} + (7+u)x_{23} + (7+u)x_{24} + (6+u)x_{25} + (5+u)x_{26} + 8x_{36} + 4x_{47} + 5x_{57}$.

7b: $u = 0$: MST: $\varphi(0) = 34$, $\xi = 1 > 0$. $\underline{z} = 34$. Öka u.

$u = 1$: MST: $\varphi(1) = 37 - 2 = 35$, $\xi = 1 > 0$. $\underline{z} = 35$. Öka u. (Jag råkade välja så att jag inte fick en tillåten lösning.)

$u = 2$: MST: $\varphi(2) = 39 - 4 = 35$, $\xi = 0$. Tillåten lösning. $\underline{z} = 35$. $\bar{z} = 35$. u behöver inte ändras.

$u = 3$: MST: $\varphi(3) = 41 - 6 = 35$, $\xi = -1 < 0$. $\underline{z} = 35$. $\bar{z} = 38$. Minska u.

Vi ser att optimalt $u = 2$. De bästa gränserna på det optimala målfunktionsvärdet är $35 \leq z^* \leq 35$, så vi har optimum.

7c: Om lösningen inte är tillåten, går för många bågar till nod 2. Om man ökar u, kommer kostnaden för alla bågar som går till nod 2 att ökas lika mycket. Antag att båge A först kommer att åka ut ur lösningen. Då kommer en annan båge, B, som inte ansluter till nod 2, in i lösningen. B bildar en cykel med bågar i trädet, bland annat A. Ändringen av u måste då vara så stor att A och B får samma kostnad. Finns det flera möjligheter, är det det som ger minst u som gäller.

Man behöver då studera alla cykler genom nod 2, och räkna ut skillnaden mellan den dyraste bågen i trädet och den billigaste bågen utanför trädet som inte ansluter till nod 2. I detta exempel finns cykler som ger minsta $u = 1$, men lösningen är då inte unik. Ökar man u till 2 får man säkert en tillåten lösning.

Det är ganska jobbigt att finna och kolla alla cykler genom en viss nod, så det är nog inte så smart beräkningsmässigt.