Tekniska Högskolan i Linköping
Matematiska Institutionen
Optimeringslära
Kaj Holmberg

Optimering av realistiska sammansatta system
Lösning till tentamen
2024-01-10

Lösningar/svar

Uppgift 1

1a: Variabeldefinition: $x_j = 1$ om sak j ska tas med, 0 om inte.

max $z = 6x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 8x_5 + 5x_6$
då $\quad 4x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 5x_5 + 3x_6 \leq 10$
$x_j \in \{0, 1\}$ för $j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

1b: Indata: c_k : vinst, a_k : vikt.
Definitioner:
Tillstånd: s_k = vikt för de k första sakerna.
Styrning: $x_k = 1$ om sak k är med, 0 om inte.
Överföringsfunktion: $s_{k-1} = s_k - a_k x_k$.
Målfunktion: $f_k(s_k) = \max_{x_k}(c_k x_k + f_{k-1}(s_{k-1}))$.
$0 \leq s_k \leq 10$ för alla k. $s_0 \geq 0$, $s_6 = 10$. $f_0(s_0) = 0$.

1c:
Iteration 1:

$x_1 \backslash s_1$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	-	-	-	-	6	6	6	6	6	6	6
$f_1(s_1)$	0	0	0	0	6	6	6	6	6	6	6
$\hat{x}_1(s_1)$	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1

Iteration 2:

$x_2 \backslash s_2$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0	0	0	6	6	6	6	6	6	6
1	-	2	2	2	2	8	8	8	8	8	8
$f_2(s_2)$	0	2	2	2	6	8	8	8	8	8	8
$\hat{x}_2(s_2)$	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1

Iteration 3:

$x_3 \backslash s_3$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	2	2	2	6	8	8	8	8	8	8
1	-	1	3	3	3	7	9	9	9	9	9
$f_3(s_3)$	0	2	3	3	6	8	9	9	9	9	9
$\hat{x}_3(s_3)$	0	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1

Iteration 4:

$x_4 \backslash s_4$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	2	3	3	6	8	9	9	9	9	9
1	-	-	3	5	6	6	9	11	12	12	12
$f_4(s_4)$	0	2	3	5	6	8	9	11	12	12	12
$\hat{x}_4(s_4)$	0	0	0	1	0	0	0	1	1	1	1

Iteration 5:

$x_5 \backslash s_5$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	2	3	5	6	8	9	11	12	12	12
1	-	-	-	-	-	8	10	11	13	14	16
$f_5(s_5)$	0	2	3	5	6	8	10	11	13	14	16
$\hat{x}_5(s_5)$	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1

Iteration 6:

$x_6 \backslash s_6$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	2	3	5	6	8	10	11	13	14	16
1	-	-	-	5	7	8	10	11	13	15	16
$f_4(s_4)$	0	2	3	5	7	8	10	11	13	15	16
$\hat{x}_4(s_4)$	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0

Uppnystning: $s_6 = 10$, $x_6 = 0$, $s_5 = 10$, $x_5 = 1$, $s_4 = 5$, $x_4 = 0$, $s_3 = 5$, $x_3 = 0$, $s_2 = 5$, $x_2 = 1$, $s_1 = 4$, $x_1 = 1$, $s_0 = 0$. $z = 16$.
Svar i ord: Ta med sakerna 1, 2 och 5 på, dvs. traktorn, plogen och tröskan. (Lösningen är inte unik.) Detta ger vinst 16.

1d: Högerledet ändras då till 9.
Uppnystning: $s_6 = 9$, $x_6 = 1$, $s_5 = 6$, $x_5 = 1$, $s_4 = 1$, $x_4 = 0$, $s_3 = 1$, $x_3 = 0$, $s_2 = 1$, $x_2 = 1$, $s_1 = 0$, $x_1 = 0$, $s_0 = 0$. $z = 15$.
Svar i ord: Ta med sakerna 2, 5 och 6 på, dvs. plogen, tröskan och gödselspridaren. Detta ger vinst 15.

Uppgift 2

2a: Subproblem (Lagrangerelaxation):
$\varphi(\bar{u}) = \min -6x_1 - 2x_2 - x_3 - 3x_4 - 8x_5 - 5x_6 + u(4x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 5x_5 + 3x_6 - 10) = (4u-6)x_1 + (u-2)x_2 + (u-1)x_3 + (2u-3)x_4 + (5u-8)x_5 + (3u-5)x_6 - 10u$
då $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \in \{0, 1\}$

F.ö. se kurslitteraturen.

2b: $\bar{u} = 0.5$ ger $\varphi(0.5) = \min -4x_1 - 1.5x_2 - 0.5x_3 - 2x_4 - 5.5x_5 - 3.5x_6 - 5$ då $x \in \{0, 1\}$, vilket har lösningen $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 1$, $x_5 = 1$, $x_6 = 1$, och $\varphi(0.5) = -22$, vilket ger $\underline{v} = -22$. Subgradient: $\xi = 6 > 0$ så lösningen är inte tillåten och ingen övre gräns fås.

$\bar{u} = 1$ ger $\varphi(1) = \min -2x_1 - x_2 - x_4 - 3x_5 - 2x_6 - 10$ då $x \in \{0, 1\}$, vilket har lösningen $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$, $x_5 = 1$, $x_6 = 1$, och $\varphi(1) = -19$, en bättre undre gräns, $\underline{v} = -19$. Subgradient: $\xi = 5 > 0$ så lösningen är inte tillåten och ingen övre gräns fås.

$\bar{u} = 2$ ger $\varphi(2) = \min 2x_1 + x_3 + x_4 + 2x_5 + x_6 - 20$ då $x \in \{0, 1\}$, vilket har lösningen

$x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$, $x_6 = 0$, och $\varphi(2) = -20$, men inte en bättre undre gräns. Subgradient: $\xi = -10 < 0$ så lösningen är tillåten, och ger övre gräns 0.

Vi har nu $-19 \leq v^* \leq 0$, vilket inte visar att vi har funnit optimum. Vi noterar att $\xi > 0$ för $u = 1$ och $\xi < 0$ för $u = 2$, så optimalt u bör ligga mellan 1 och 2.

2c: Vi vill alltså att minimering av $(4u-6)x_1 + (u-2)x_2 + (u-1)x_3 + (2u-3)x_4 + (5u-8)x_5 + (3u-5)x_6$ ska ge lösningen $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = 1$, $x_6 = 0$. Detta kräver att $(4u-6) \leq 0$, $(u-2) \leq 0$, $(u-1) \geq 0$, $(2u-3) \geq 0$, $(5u-8) \leq 0$, $(3u-5) \geq 0$, dvs. $u \leq 6/4 = 1.5$, $u \leq 2$, $u \geq 1$, $u \geq 3/2 = 1.5$, $u \leq 8/5 = 1.6$, $u \geq 5/3 \approx= 1.667$, dvs. $u \geq 1.667$ och $u \leq 1.5$ vilket inte har någon lösning. Det finns alltså inget u som både ger $x_1 = 1$ och $x_6 = 0$.

Uppgift 3

3a: Dantzig-Wolfe: Subproblemet återfinnes ovan (men med $0 \leq x \leq 1$ istället för $x \in \{0,1\}$, vilket inte gör någon skillnad). Masterproblemet blir

$$\begin{array}{ll} \max & q \\ \text{då} & q \leq -6x_1^{(l)} - 2x_2^{(l)} - x_3^{(l)} - 3x_4^{(l)} - 8x_5^{(l)} - 5x_6^{(l)} \\ & \quad +u(4x_1^{(l)} + x_2^{(l)} + x_3^{(l)} + 2x_4^{(l)} + 5x_5^{(l)} + 3x_6^{(l)} - 10) \;\; \text{för alla } l \\ & u \geq 0 \end{array}$$

Metoden itererar mellan subproblemet och masterproblemet. Subproblemet löses för givna värden på u, och ger en undre gräns, $\varphi(\bar{u})$, samt en ny lösning, $x^{(l)}$, till masterproblemet. Masterproblemet löses med alla kända $x^{(l)}$, och ger en övre gräns, samt nytt $\bar{u}$ till subproblemet. Metoden avslutas då den undre gränsen är lika med den övre. Då läser man ut den duala lösningen, λ, till masterproblemet, och skapar den optimala lösningen som $\sum_l \lambda_l x^{(l)}$.

3b: $u = 0.5$ ger $x = (111111)$, vilket ger snitt $q \leq -25 + 6u$.
$u = 1$ ger $x = (110111)$, vilket ger snitt $q \leq -24 + 5u$.
$u = 2$ ger $x = (000000)$, vilket ger snitt $q \leq -10u$.

Masterproblemet blir alltså

$$\begin{array}{rll} v_{DM} = \max & q & \\ \text{då} & q \leq -25 + 6u & (1) \\ & q \leq -24 + 5u & (2) \\ & q \leq -10u & (3) \\ & u \geq 0 & \end{array}$$

Optimum fås för $u = 24/15 = 1.6$, med $q = -16$. Vi får alltså $\bar{v} = v_{DM} = -16$.

$\bar{u} = 1.6$ ger i subproblemet $\varphi(1.6) = \min 0.4x_1 - 0.4x_2 + 0.6x_3 + 0.2x_4 - 0.2x_6 - 16$ då $x \in \{0,1\}$, vilket har lösningen $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$, $x_6 = 1$, och $\varphi(1.6) = -16.6$, vilket är en bättre undre gräns, $\underline{v} = -16.6$. Subgradient: $\xi = -6 < 0$ så lösningen är tillåten. Vi får snittet $q \leq -7 - 6u$.

Masterproblemet blir nu

$$\begin{array}{rll} v_{DM} = \max & q & \\ \text{då} & q \le -25 + 6u & (1) \\ & q \le -24 + 5u & (2) \\ & q \le -10u & (3) \\ & q \le -7 - 6u & (4) \\ & u \ge 0 & \end{array}$$

Optimum fås i skärningen av snitt 2 och 4, och blir $u = 1.54$, med $q = -16.27$. Vi får alltså $\bar{v} = v_{DM} = -16.27$. Nu har vi $\underline{v} = -16.6$ och $\bar{v} = -16.27$.

$\bar{u} = 1.54$ ger i subproblemet $\varphi(1.54) = \min 0.18x_1 - 0.45x_2 + 0.54x_3 + 0.09x_4 - 0.27x_5 - 0.36x_6 - 15.454$ då $x \in \{0, 1\}$, vilket har lösningen $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = 1$, $x_6 = 1$, och $\varphi(1.54) = -16.54$, vilket är en bättre undre gräns $\underline{v} = -16.54$. Subgradient: $\xi = -1 < 0$ så lösningen är tillåten. Vi får snittet $q \le -15 - u$.

Masterproblemet blir nu

$$\begin{array}{rll} v_{DM} = \max & q & \\ \text{då} & q \le -25 + 6u & (1) \\ & q \le -24 + 5u & (2) \\ & q \le -10u & (3) \\ & q \le -7 - 6u & (4) \\ & q \le -15 - u & (5) \\ & u \ge 0 & \end{array}$$

Optimum fås i skärningen av snitt 2 och 5, och blir $u = 1.5$, med $q = -16.5$. Vi får alltså $\bar{v} = v_{DM} = -16.5$. Nu har vi $\underline{v} = -16.6$ och $\bar{v} = -16.5$.

$\bar{u} = 1.5$ ger i subproblemet $\varphi(1.5) = \min -0.5x_2 + 0.5x_3 - 0.5x_5 - 0.5x_6 - 15$ då $x \in \{0, 1\}$, vilket har lösningen $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = 1$, $x_6 = 1$, och $\varphi(1.5) = -16.5$, vilket är en bättre undre gräns $\underline{v} = -16.5$.

Nu har vi $\underline{v} = \bar{v} = -16.5$, dvs. övre och undre gräns lika. Det betyder att $u = 1.5$ är optimalt.

LP-dualen av masterproblemet blir

$$\begin{array}{ll} v_{DM} = \min & -25\lambda_1 - 24\lambda_2 - 7\lambda_4 - 15\lambda_5 \\ \text{då} & -6\lambda_1 - 5\lambda_2 + 10\lambda_3 + 6\lambda_4 + \lambda_5 \ge 0 \\ & \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 = 1 \\ & \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5 \ge 0 \end{array}$$

Komplementaritet ger via inaktiva snitt (för $u = 1.5$) $\lambda_1 = 0$, $\lambda_3 = 0$, $\lambda_4 = 0$. Eftersom $u > 0$, får vi $5\lambda_2 = \lambda_5$. Tillsammans med $\lambda_2 + \lambda_5 = 1$, ger det $\lambda_2 = 1/6$ och $\lambda_5 = 5/6$. Den optimala primala lösningen blir då $x = \lambda_2 x^{(2)} + \lambda_5 x^{(5)} = 1/6(1, 1, 0, 1, 1, 1) + 5/6(0, 1, 0, 0, 1, 1) = (1/6, 1, 0, 1/6, 1, 1)$. (Extrakoll: Insättning ger att bivillkoret är uppfyllt med likhet.)

Uppgift 4

4a: Modell:

$$\begin{array}{llrcl} v^* = \min & -6x_1 - 2x_2 - x_3 - 3x_4 - 8x_5 - 5x_6 + 4y_1 + 8y_2 & & & \\ \text{då} & 4x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 5x_5 + 3x_6 - 3y_1 - 5y_2 & \leq & 10 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 & \leq & 1 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 & \geq & 0 \\ & y_1 + y_2 & <= & 1 \\ & y_1, y_2 & \in & \{0, 1\} \end{array}$$

4b: Subproblemet (för fixerat y):

$$\begin{array}{llrcl} \psi(\bar{y}) = \min & -6x_1 - 2x_2 - x_3 - 3x_4 - 8x_5 - 5x_6 + 4\bar{y}_1 + 8\bar{y}_2 & & & \\ \text{då} & 4x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 5x_5 + 3x_6 & \leq & 10 + 3\bar{y}_1 + 5\bar{y}_2 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 & \leq & 1 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 & \geq & 0 \end{array}$$

LP-dualen av subproblemet:

$$\begin{array}{llrcl} \psi(\bar{y}) = \max & (-10 - 3\bar{y}_1 - 5\bar{y}_2)u_0 - u_1 - u_2 - u_3 - u_4 - u_5 - u_6 + 4\bar{y}_1 + 8\bar{y}_2 & & & \\ \text{då} & -4u_0 - u_1 & \leq & -6 \\ & -u_0 - u_2 & \leq & -2 \\ & -u_0 - u_3 & \leq & -1 \\ & -2u_0 - u_4 & \leq & -3 \\ & -5u_0 - u_5 & \leq & -8 \\ & -3u_0 - u_6 & \leq & -5 \\ & u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6 & \geq & 0 \end{array}$$

De duala bivillkoren kan skrivas som $U = \{u : 4u_0 + u_1 \geq 6, u_0 + u_2 \geq 2, u_0 + u_3 \geq 1, 2u_0 + u_4 \geq 3, 5u_0 + u_5 \geq 8, 3u_0 + u_6 \geq 5, u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6 \geq 0\}$.

Benders masterproblem:

$$\begin{array}{ll} \min & q \\ \text{då} & q \geq (4 - 3u_0^{(l)})y_1 + (8 - 5u_0^{(l)})y_2 - 10u_0^{(l)} - u_1^{(l)} - u_2^{(l)} - u_3^{(l)} - u_4^{(l)} - u_5^{(l)} - u_6^{(l)} \quad \text{för alla } l \\ & y_1 + y_2 <= 1 \\ & y_1, y_2 \in \{0, 1\} \end{array}$$

Metoden itererar mellan subproblemet och masterproblemet. Subproblemet löses för givna värden på y, och ger en övre gräns, $h(\bar{y})$, samt en ny lösning, $u^{(l)}$, till masterproblemet. Masterproblemet löses med alla kända $u^{(l)}$, och ger en undre gräns, samt nya $\bar{y}$ till subproblemet. Metoden avslutas då den undre gränsen är lika med den övre.

4c: För $\bar{y} = (0, 0)$: Primalt:
$\psi(0, 0) = \min -6x_1 - 2x_2 - x_3 - 3x_4 - 8x_5 - 5x_6$
då $4x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 5x_5 + 3x_6 \leq 10$
$0 \leq x \leq 1$

Den primala lösningen till det kontinuerliga kappsäcksproblemet med $b = 10$ blir som följer: $x_2 = 1$, $\hat{b} = 9$, $x_6 = 1$, $\hat{b} = 6$, $x_5 = 1$, $\hat{b} = 1$, $x_1 = 1/4$, $\hat{b} = 0$, $x_4 = 0$, $\hat{b} = 0$, $x_3 = 0$, $\hat{b} = 0$, med målfunktionsvärde -16.5.

Dualen: $\psi(0, 0) = \max -10u_0 - u_1 - u_2 - u_3 - u_4 - u_5 - u_6$ då $u \in U$.
Den duala lösningen blir $u_0 = 1.5$, samt $u_1 = 0$, $u_3 = 0$, $u_4 = 0$, $u_2 = 0.5$ $u_5 = 0.5$,

$u_6 = 0.5$. Vi får $\bar{v} = -16.5$.

Benderssnittet blir $q \geq -0.5y_1 + 0.5y_2 - 16.5$.

Benders masterproblem:

$$\begin{array}{rl} \min & q \\ \text{då} & q \geq -0.5y_1 + 0.5y_2 - 16.5 \\ & y_1 + y_2 <= 1 \\ & y_1, y_2 \in \{0, 1\} \end{array}$$

Den bästa lösningen är $y_1 = 1$ och $y_2 = 0$, med $q = -17$. Vi har nu $-17 \leq v^* \leq -16.5$,

För $\bar{y} = (1, 0)$: Primalt:
$\psi(1, 0) = \min \min -6x_1 - 2x_2 - x_3 - 3x_4 - 8x_5 - 5x_6 + 4$
då $4x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 5x_5 + 3x_6 \leq 13$
$0 \leq x \leq 1$
Den primala lösningen till det kontinuerliga kappsäcksproblemet med $b = 13$ blir som följer: $x_2 = 1$, $\hat{b} = 12$, $x_6 = 1$, $\hat{b} = 9$, $x_5 = 1$, $\hat{b} = 4$, $x_1 = 1$, $\hat{b} = 0$, $x_4 = 0$, $\hat{b} = 0$, $x_3 = 0$, $\hat{b} = 0$, med målfunktionsvärde -17.

Vi har nu $-17 \leq v^* \leq -17$, så optimum är uppnått. Den bästa lösningen vi funnit är $y_1 = 1$, $y_2 = 0$, samt $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = 1$, $x_6 = 1$.

Svar i ord: Välj den mindre bilen.

Uppgift 5

5a: Utan hjälp (en person): Noderna 2, 3, 5 och 7 har udda valens. Dubblering av bågarna (2,7), (3,4) och (4,5) är billigaste sättet att ge alla noder jämn valens. Kostnaden för turen blir 58+14 = 72. Tiden blir 72, och fasta kostnaden 0. Målfunktionsvärdet blir då $72 + 72 = 144$.

6b: Med Barbie (två personer): Förslag på uppdelning:
Person 1: Kostnad: 35. Tid: 35.
Person 2: Kostnad: 37. Tid: 37.
Fast kostnad: 30. Maxtid: 37. Målfunktionsvärdet blir $35 + 37 + 30 + 37 = 139$.

6c: Med Barbie och Bodil (tre personer): Förslag på uppdelning:
Person 1: Kostnad: 21. Tid: 21.
Person 2: Kostnad: 21. Tid: 21.
Person 3: Kostnad: 33. Tid: 33.
Fast kostnad: 50. Maxtid: 33. Målfunktionsvärdet blir nu $21+21+33+50+33 = 158$.

6d: Totala kostnaden blir lägst för två personer.

6e: Med ovanstående turer fås följande kostnader, med f som kostnad för godispåsen:
En person: 144.
Två personer: 139.
Tre personer: $138 + f$.

Tre personer är bäst om $144 \geq 138 + f$ och $139 \geq 138 + f$, vilket ger $6 \geq f$ och $1 \geq f$, dvs. om $f \leq 1$. (Det måste vara en billig godispåse.)

Uppgift 6

7a: Extra bivillkoret: $x_{24}+x_{34}+x_{45}+x_{47} \leq 1$. Subgradient $\xi = x_{24}+x_{34}+x_{45}+x_{47}-1$.

Lagrangerelaxation: $\varphi(u) = \min_{x \in T} 7x_{12} + 6x_{13} + 5x_{24} + 8x_{27} + 3x_{34} + 8x_{35} + 3x_{45} + 6x_{47} + 8x_{56} + 4x_{6,7} + u(x_{24} + x_{34} + x_{45} + x_{47} - 1) = 7x_{12} + 6x_{13} + (5+u)x_{24} + 8x_{27} + (3+u)x_{34} + 8x_{35} + (3+u)x_{45} + (6+u)x_{47} + 8x_{56} + 4x_{6,7} - u$.

7b: $u = 0$: MST: $\varphi(0) = 27$, $\xi = 3 > 0$. $\underline{z} = 27$. Öka u.

$u = 1$: MST: $\varphi(1) = 31 - 1 = 30$, $\xi = 3 > 0$. $\underline{z} = 30$. Öka u.

$u = 2$: MST: $\varphi(2) = 35 - 2 = 33$, $\xi = 1 > 0$. $\underline{z} = 33$. Öka u.

$u = 3$: MST: $\varphi(2) = 37 - 3 = 34$, $\xi = 1 > 0$. $\underline{z} = 34$. Öka u.

Vi ser att optimalt u är större än 3. Vi fick aldrig en tillåten lösning. De bästa gränserna på det optimala målfunktionsvärdet är $z^* \geq 34$.

Uppgift 7

Se kurslitteraturen.