Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP61/TEN 1
OPTIMERING AV REALISTISKA SAMMANSATTA SYSTEM
för EMM

Datum:	19 december 2012
Tid:	8.00-12.00
Hjälpmedel:	Miniräknare
	Kurslitteratur: Kaj Holmberg: *Optimering*
	Anteckningar i boken får förekomma.
Antal uppgifter:	8
Antal sidor:	6
	Uppgifterna är *inte* ordnade efter svårighetsgrad.
	Totalt antal poäng är 40. För godkänt krävs normalt 16 poäng.
Examinator:	Kaj Holmberg
Jourhavande lärare:	Kaj Holmberg, tel 013-282867

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa dina beräkningar och din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden du gör.
Använd de standardmetoder som ingår i kursen.

Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla endast en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget vilka uppgifter du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.

Information: Tentan består av 8 uppgifter om 5 poäng var. De fyra första uppgifterna behandlar metoder i allmänhet, och kan innehålla beräkningar. De fyra sista uppgifterna behandlar projekten. Till dessa uppgifter finns inte alltid svar som är rätt eller fel, och i sådana fall belönas en tydlig och relevant diskussion om sådant som talar för respektive emot olika utsagor.

Uppgift 1

Firma K-plast säljer bl.a. snöslungor, och funderar på inköp och lagerhållning inför vintern. Man planerar för de tre månaderna december, januari och februari. I butiken i Linköping förväntar man sig sälja 5 snöslungor i december, 3 i januari och 2 i februari. Man har 4 snöslungor i lager i slutet av november (eftersom det var så lite snö förra säsongen), men vill inte ha några i lager efter februari.

Inköpskostnaderna är inte linjära, utan snarast konkava, baserat på hur många som köps vid samma tillfälle. Inköpen sker en gång i månaden, närmare bestämt i början av varje månad, och man kan köpa högst 3 vid samma tillfälle. Inköpskostnaderna ges i nedanstående tabell.

Antal	Kostnad
0	0
1	5
2	7
3	8

Lagerkostnaden är linjär, 3 per slunga, och baseras på antalet i lager vid slutet av varje månad. Man har inte plats att lagra mer än 4 slungor från en månad till nästa. (Man tar inte med kostnaden för de som är i lager i slutet av november.) Målet är att uppfylla behovet till minimal kostnad.

a) Hjälp K-plast att lösa problemet med dynamisk programmering. Skriv upp alla nödvändiga definitioner (av tillstånd etc), lös problemet och ange erhållen kostnad, inköp samt lagerhållning.

b) Antag att man bestämmer sig för att ha 3 snöslungor i lager i slutet av februari. Hur mycket ökar kostnaden och hur bör man då sköta inköpen? (Man räknar inte med någon lagerkostnad i slutet av februari.)

Uppgift 2

Firma TungTransport AB har fått beställningar på transporter av fyra stora maskiner från Linköping till Jönköping. Man kommer att göra en körning med sin lastbil, som inte kan ta mer än 11 ton. Eftersom den totala tyngden av beställningarna överstiger 11 ton, kan man inte ta med alla maskinerna, och de man inte tar med kommer troligen att transporteras av en annan transportör.

Därför vill man välja vilka transporter man accepterar, så att man maximerar sina intäkter. Intäkt och vikt för varje maskintransport ges av nedanstående tabell.

Maskin	Intäkt	Vikt (ton)
1	2	4
2	3	5
3	4	4
4	4	5

a) Formulera problemet att välja vilka transporter man ska göra som ett binärt kappsäcksproblem.

b) Formulera Lagrangerelaxation av problemet (där kappsäcksvillkoret relaxeras). Lös Lagrangerelaxationen först med multiplikatorn $u = 0$, och sedan med $u = 2$. Använd därefter intervallhalvering, dvs. lös problemet med u lika med mittpunkten mellan de mest lovande duala punkterna. Gör tre ytterligare iterationer. (I första iterationen blir $u = 1$)

Var noga med att notera undre gränser, subgradienter och eventuella övre gränser som fås i varje iteration.

Ange, efter dessa fem iterationer, den bästa funna tillåtna lösningen samt hur långt ifrån det optimala målfunktionsvärdet den maximalt kan ligga.

Rita upp en approximativ bild av den duala funktionen med hjälp av de data som erhållits under lösningens gång.

Uppgift 3

Betrakta det okapaciterade lokaliseringsproblemet, dvs. lokaliseringsproblemet där varje fabrik har en mycket stor kapacitet. (Se sida 32 i boken. Observera dock att bivillkorsgrupp 1 kan tas bort.)

a) Föreslå en lämplig Lagrangerelaxation för problemet, dvs. tala om vilka bivillkor som ska relaxeras. Ange hur relaxationen (subproblemet) ska lösas. (Du har inte tillgång till någon annan programvara.) Beskriv hur man kan applicera subgradientoptimering på problemet (dvs. hur man får subgradienter, hur man uppdaterar multiplikatorerna, samt hur metoden fortgår).

b) Anta att problemet ska lösas med Bendersdekomposition. Beskriv kortfattat hur metoden går till, speciellt sub- och masterproblem, vilka övre/undre gränser som fås och hur Benderssnitten räknas ut.

Uppgift 4

a) Förbättras den övre gränsen i Dantzig-Wolfedekomposition i varje iteration? Varför (inte)? Förbättras den undre gränsen i Dantzig-Wolfedekomposition i varje iteration? Varför (inte)?

b) Förbättras den övre gränsen i Bendersdekomposition i varje iteration? Varför (inte)? Förbättras den undre gränsen i Bendersdekomposition i varje iteration? Varför (inte)?

c) Motivera varför Dantzig-Wolfedekomposition ger optimum efter ett ändligt antal iterationer.

d) Motivera varför Bendersdekomposition ger optimum efter ett ändligt antal iterationer.

e) På vilket sätt pekar en subgradient åt rätt håll och på vilket sätt kan den peka åt fel håll?

Uppgift 5

Utgå från projekt 1, Returpack.

a) Vad skulle hända om man tar med två olika sorters varor (tomburkar och tomma Pet-flaskor) i Returpack-modellen? Hur ändras modellen? (Beakta variabler, bivillkor, storlek etc.) Kan man lösa det som två separata problem, eller hänger delarna oupplösligt ihop? (Ge inte någon fullständig modell.)

b) Returpacksmodellen är nästan ett minkostnadsflödesproblem. (Varför bara nästan?) Antag att man har en effektiv kod för minkostnadsflödesproblemet (en sådan finns t.ex. i Vineopt). Hur skulle man kunna utnyttja den för att lösa problemet, antingen approximativt eller som ett subproblem i en dekompositionsmetod?

Uppgift 6

Utgå från projekt 2, laddhybrid.

a) Beskriv utvidgningar av problemet som gör det mer realistiskt, både sådana som kan hanteras av dynamisk programmering och sådana som skulle kräva en annan lösningsmetod. Alternativt, beskriv några ändringar av problemet som kan hanteras av dynamisk programmering och några ändringar som inte kan det.

b) Vilka andra metoder skulle man kunna använda för att lösa problemet? Beskriv för- och nackdelar.

Uppgift 7

Utgå från projekt 3, Sveriges elnät.

a) Försök beskriva Bendersdekomposition på detta problem för någon som inte kan metoden, men som har vaga minnen av en optimeringskurs för länge sedan. Förklara speciellt Benderssnitten. Ledning: Dualvariabler anger hur mycket bivillkor tar emot, och reducerade kostnader anger vad man vill göra med variabelvärdena. (Undvik att diskutera "den duala konstanten".)

b) Hur skulle man kunna få in tiden i problemet? Antag att efterfrågan varierar med tiden och att utbyggnader kan ske vid olika tidpunkter. Hur påverkas modellen? Hur påverkas lösningsmetoden?

Uppgift 8

Utgå från projekt 4, snöröjning.

a) Hur skulle du göra för att få fram den bästa möjliga lösningen till ett snöröjningsproblem av samma storlek som hela Ryd, om du hade lång tid på dig. Använd företrädesvis de verktyg som du känner till från projektet/kursen. Föreslå en bra omgivning (dvs. hur man ändrar en lösning). Visa att man kan beräkna en ny granne (lösning) utan alltför mycket arbete.

b) På vilka sätt kan modellen göras mer verklighetstrogen, under förutsättning att man inte använder en annan lösningsmetod?

Appendix

Lagrangedual: $v_L = \max g(u_1)$ då $u_1 \geq 0$ (PL)

Lagrangerelaxation:
$$\begin{array}{rlrcl} g(\bar{u}_1) = & \min & c^T x + \bar{u}_1^T (Ax - b) & & \\ & \text{då} & Bx & \leq & d \\ & & x & \geq & 0 \end{array} \quad \text{(DS)}$$

$X = \{x : Bx \leq d,\ x \geq 0\}$ med extrempunkter $x^{(k)}$ $\forall k \in P_X$.
Subgradient: $\xi = (A\bar{x} - b)$ där $\bar{x}$ är optimal i DS.
Om $0 \in \partial g(\bar{u})$ och $\bar{u} \geq 0$ så är $\bar{u}$ optimal.
Om $\exists \xi \in \partial g(\bar{u}) :\ \xi^T \bar{u} = 0,\ \xi \leq 0$ och $\bar{u} \geq 0$ så är $\bar{u}$ optimal.

Dantig-Wolfes masterproblem ($P'_X \subseteq P_X$):

$$\begin{array}{rll} v_{DM} = & \min & \sum_{k \in P'_X} c^T x^{(k)} \lambda_k \\ & \text{då} & \sum_{k \in P'_X} (A_1 x^{(k)} - b_1) \lambda_k \leq 0 \\ & & \sum_{k \in P'_X} \lambda_k = 1 \\ & & \lambda_k \geq 0 \ \ \forall k \in P'_X \end{array} \quad \text{(DMP)}$$

eller
$$\begin{array}{rll} v_{DM} = & \max & q \\ & \text{då} & q \leq c^T x^{(k)} + u_1^T (A_1 x^{(k)} - b_1) \quad \forall k \in P'_X \\ & & u_1 \geq 0 \end{array} \quad \text{(DM)}$$

Bendersdekomposition på problemet:

$v^* = \min c^T x + f(y)$ då $Ax + G(y) \leq b,\ x \geq 0,\ y \in S$

Benders subproblem:

$$\begin{array}{rll} h(\bar{y}) = f(\bar{y}) + & \min & c^T x \\ & \text{då} & Ax \leq b - G(\bar{y}) \\ & & x \geq 0 \end{array} \quad \text{(PSP)}$$

eller
$$\begin{array}{rll} h(\bar{y}) = f(\bar{y}) + & \max & (G(\bar{y}) - b)^T u \\ & \text{då} & -A^T u \leq c \\ & & u \geq 0 \end{array} \quad \text{(PS)}$$

Benders masterproblem:

$$\begin{array}{rlll} v_{PM} = & \min & q & \\ & \text{då} & q \geq f(y) + (G(y) - b)^T u^{(k)} & \forall k \in P'_U \\ & & 0 \geq (G(y) - b)^T \tilde{u}^{(k)} & \forall k \in R'_U \\ & & y \in S & \end{array} \quad \text{(PM)}$$