Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP61/TEN 1
OPTIMERING AV REALISTISKA SAMMANSATTA SYSTEM
för EMM

Datum:	25 mars 2013
Tid:	8.00-12.00
Hjälpmedel:	Miniräknare
	Kurslitteratur: Kaj Holmberg: *Optimering*
	Anteckningar i boken får förekomma.
Antal uppgifter:	8
Antal sidor:	6
	Uppgifterna är *inte* ordnade efter svårighetsgrad.
	Totalt antal poäng är 40. För godkänt krävs normalt 16 poäng.
Examinator:	Kaj Holmberg
Jourhavande lärare:	Kaj Holmberg, tel 013-282867

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa dina beräkningar och din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden du gör.
Använd de standardmetoder som ingår i kursen.

Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla endast en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget vilka uppgifter du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.

Information: Tentan består av 8 uppgifter om 5 poäng var. De fyra första uppgifterna behandlar metoder i allmänhet, och kan innehålla beräkningar. De fyra sista uppgifterna behandlar projekten. Till dessa uppgifter finns inte alltid svar som är rätt eller fel, och i sådana fall belönas en tydlig och relevant diskussion om sådant som talar för respektive emot olika utsagor.

Uppgift 1

Västerköpings kommun ska uppföra nya reningsverk. Man får använda högst 34 miljoner kr för detta. Det finns fyra olika möjliga platser att bygga på, och man har bestämt hur ett reningsverk på varje plats ska se ut. Man vill bygga på en eller flera av platserna. Man har uppskattat nyttan av varje möjligt reningsverk, samt kostnaden att uppföra detta, och detta ges i tabellen nedan.

Plats	Nytta	Kostnad (milj kr)
1	3	10
2	4	10
3	6	12
4	5	8

a) Formulera problemet att välja på vilka platser reningsverk ska byggas så att nyttan maximeras, utan att det kostar för mycket, som ett binärt kappsäcksproblem.

b) Formulera en Lagrangerelaxation av problemet (där kappsäcksvillkoret relaxeras). Lös Lagrangerelaxationen först med multiplikatorn $u = 0$, och sedan med $u = 1$. Använd därefter intervallhalvering, dvs. lös problemet med u lika med mittpunkten mellan de mest lovande duala punkterna. Gör tre ytterligare iterationer. (I första iterationen blir $u = 0.5$)

Var noga med att notera undre gränser, subgradienter och eventuella övre gränser som fås i varje iteration.

Ange, efter dessa fem iterationer, den bästa funna tillåtna lösningen samt hur långt ifrån det optimala målfunktionsvärdet den maximalt kan ligga.

Rita upp en approximativ bild av den duala funktionen med hjälp av de data som erhållits under lösningens gång.

Uppgift 2

Betrakta problemet i uppgift 1.

a) Gör alla formuleringar för att lösa problemet med dynamisk programmering. Skriv upp alla nödvändiga definitioner (av tillstånd etc), och beskriv hur problemet ska lösas. Ange även hur problemets egenskaper påverkar arbetsmängden vid lösningsgången. (Lös dock ej problemet.)

b) En approximation av problemet kan fås genom att dividera alla koefficienter i bivillkoret (inklusive högerledet) med 10 och sedan avrunda alla koefficienter i bivillkoret (inklusive högerledet) till närmaste heltal. (Vad är det för vits med att göra så?)

Gör detta och lös det resulterande approximativa problemet med dynamisk programmering.

Kontrollera därefter om detta ger en tillåten lösning till det ursprungliga problemet.

c) Man funderar på att spara och använda mindre pengar till reningsverken. Hur påverkas lösningen om man minskar budgeten med 10 miljoner? (Utnyttja gärna lösningen i tidigare deluppgift.)

Uppgift 3

Betrakta nätverksdesignproblemet som återfinnes på sida 305 i boken.

a) Föreslå en lämplig Lagrangerelaxation för problemet, dvs. tala om vilka bivillkor som ska relaxeras. Ange hur relaxationen (subproblemet) ska lösas. Beskriv hur man kan applicera subgradientoptimering på problemet (dvs. hur man får subgradienter, hur man uppdaterar multiplikatorerna, samt hur metoden fortgår).

b) Anta att problemet ska lösas med Bendersdekomposition. Beskriv kortfattat hur metoden går till, speciellt sub- och masterproblem, vilka övre/undre gränser som fås och hur Benderssnitten räknas ut.

Uppgift 4

a) Motivera varför Dantzig-Wolfedekomposition ger optimum efter ett ändligt antal iterationer.

b) Motivera varför Bendersdekomposition ger optimum efter ett ändligt antal iterationer.

c) Vad är det som gör att subgradientoptimering konvergerar mot duala optimum?

d) När kan man förvänta sig att Lagrangerelaxation och subgradientoptimering ger primala optimum?

e) Vilka besvärligheter dyker upp om man applicerar Dantzig-Wolfedekomposition på ett heltalsproblem?

Uppgift 5

Utgå från projekt 1, Returpack.

a) Vad skulle hända om man tar med två olika sorters varor (tomburkar och tomma Pet-flaskor) i Returpack-modellen? Hur ändras modellen? (Beakta variabler, bivillkor, storlek etc.) Kan man lösa det som två separata problem, eller hänger delarna oupplösligt ihop? (Ge inte någon fullständig modell.)

b) Antag att man får betala en viss kostnad för att överhuvudtaget ha med grossister i returpackshanteringen, och att samma sak gäller bryggerier. Hur kan man modifiera modellen så att den finner optimalt val för dessa möjligheter, dvs. om grossister och/eller bryggerier ska hantera tomförpackningar alls?

Uppgift 6

Utgå från projekt 2, laddhybrid.

Kan lösningsmetoden som användes i projektet hantera följande komplikationer (och i så fall hur)? Om inte, föreslå översiktligt hur man ska angripa problemet.

- Man får inte ändra framdrivningssätt för mycket mellan närliggande vägavsnitt, bara till närliggande läge (t.ex. inte direkt från bara el till bara bensin).
- Man kan ladda upp batteriet mycket vid inbromsning.
- Man kan ladda batteriet vid en längre paus på två specifika platser på vägen.
- Vägen är inte given, och man vill finna optimal väg samtidigt som man finner

optimalt framdrivningssätt.

Uppgift 7

Utgå från projekt 3, Sveriges elnät.

a) Försök beskriva Bendersdekomposition på detta problem för någon som inte kan metoden, men som har vaga minnen av en optimeringskurs för länge sedan. Förklara speciellt Benderssnitten. Ledning: Dualvariabler anger hur mycket bivillkor tar emot, och reducerade kostnader anger vad man vill göra med variabelvärdena. (Undvik att diskutera "den duala konstanten".)

b) Vilka andra metoder skulle man kunna använda för att lösa problemet? Beskriv för- och nackdelar.

Uppgift 8

Utgå från projekt 4, snöröjning.

a) Hur skulle du göra för att få fram den bästa möjliga lösningen till ett snöröjningsproblem av samma storlek som hela Ryd, om du hade lång tid på dig. Använd företrädesvis de verktyg som du känner till från projektet/kursen. Föreslå en bra omgivning (dvs. hur man ändrar en lösning). Visa att man kan beräkna en ny granne (lösning) utan alltför mycket arbete.

b) Skriv upp en matematisk modell av snöröjningsproblemet.

Appendix

Lagrangedual: $v_L = \max g(u_1)$ då $u_1 \geq 0$ (PL)

Lagrangerelaxation:
$$g(\bar{u}_1) = \begin{array}{rrcl} \min & c^T x + \bar{u}_1^T(Ax-b) & & \\ \text{då} & Bx & \leq & d \\ & x & \geq & 0 \end{array} \qquad \text{(DS)}$$

$X = \{x : Bx \leq d,\ x \geq 0\}$ med extrempunkter $x^{(k)}\ \forall k \in P_X$.
Subgradient: $\xi = (A\bar{x} - b)$ där $\bar{x}$ är optimal i DS.
Om $0 \in \partial g(\bar{u})$ och $\bar{u} \geq 0$ så är $\bar{u}$ optimal.
Om $\exists \xi \in \partial g(\bar{u}) :\ \xi^T\bar{u} = 0,\ \xi \leq 0$ och $\bar{u} \geq 0$ så är $\bar{u}$ optimal.

Dantig-Wolfes masterproblem ($P'_X \subseteq P_X$):

$$\begin{array}{rll} v_{DM} = & \min & \sum_{k \in P'_X} c^T x^{(k)} \lambda_k \\ & \text{då} & \sum_{k \in P'_X} (A_1 x^{(k)} - b_1)\lambda_k \leq 0 \\ & & \sum_{k \in P'_X} \lambda_k = 1 \\ & & \lambda_k \geq 0 \ \ \forall k \in P'_X \end{array} \qquad \text{(DMP)}$$

eller
$$\begin{array}{rll} v_{DM} = & \max & q \\ & \text{då} & q \leq c^T x^{(k)} + u_1^T(A_1 x^{(k)} - b_1) \quad \forall k \in P'_X \\ & & u_1 \geq 0 \end{array} \qquad \text{(DM)}$$

Bendersdekomposition på problemet:

$$v^* = \min c^T x + f(y) \quad \text{då } Ax + G(y) \leq b,\ x \geq 0,\ y \in S$$

Benders subproblem:

$$\begin{array}{rll} h(\bar{y}) = f(\bar{y}) + & \min & c^T x \\ & \text{då} & Ax \leq b - G(\bar{y}) \\ & & x \geq 0 \end{array} \qquad \text{(PSP)}$$

eller
$$\begin{array}{rll} h(\bar{y}) = f(\bar{y}) + & \max & (G(\bar{y}) - b)^T u \\ & \text{då} & -A^T u \leq c \\ & & u \geq 0 \end{array} \qquad \text{(PS)}$$

Benders masterproblem:

$$\begin{array}{rlll} v_{PM} = & \min & q & \\ & \text{då} & q \geq f(y) + (G(y) - b)^T u^{(k)} & \forall k \in P'_U \\ & & 0 \geq (G(y) - b)^T \tilde{u}^{(k)} & \forall k \in R'_U \\ & & y \in S & \end{array} \qquad \text{(PM)}$$