Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP61/TEN 1
OPTIMERING AV REALISTISKA SAMMANSATTA SYSTEM

Datum:	15 januari 2014
Tid:	8.00-13.00
Hjälpmedel:	Miniräknare
	Kurslitteratur: Kaj Holmberg: *Optimering*
	Anteckningar i boken får förekomma.
Antal uppgifter:	8
Antal sidor:	7
	Uppgifterna är *inte* ordnade efter svårighetsgrad.
	Totalt antal poäng är 40. För godkänt krävs normalt 16 poäng.
Examinator:	Kaj Holmberg
Jourhavande lärare:	Kaj Holmberg, tel 013-282867

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa dina beräkningar och din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden du gör.
Använd de standardmetoder som ingår i kursen.

Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla endast en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget vilka uppgifter du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.

Tentan består av 8 uppgifter om 5 poäng var. De fyra första uppgifterna behandlar metoder i allmänhet, och kan innehålla beräkningar. De fyra sista uppgifterna behandlar projekten. Till dessa uppgifter finns inte alltid svar som är rätt eller fel, och i sådana fall belönas en tydlig och relevant diskussion som visar relevanta kunskaper. (Undantagsvis kan en *mycket* väl besvarad uppgift ge mer än 5 poäng.)

Uppgift 1

Firma Snowtrac producerar snöplogar. Lagret är nu helt tomt och man har kontrakt på 5 stycken som ska säljas om en månad (för 5 miljoner kr styck) till firma SnöröjarRoger. Det tar en vecka att göra en snöplog, och man vill nu planera för de fyra veckorna fram till försäljningsdagen. Man vill inte ha halvfärdiga enheter stående över helgen, så man har bestämt att man påbörjar produktionen av en snöplog på måndagen och avslutar den på fredagen samma vecka. Det man nu vill bestämma är hur många plogar man ska göra varje vecka.

De naturliga vore kanske att göra alla sista veckan, men man har inte plats för att göra mer än tre plogar samma vecka. Produktionskostnaderna varierar också mellan de olika veckorna; det är billigare innan säsongen sätter igång på allvar. Dessutom gör samordningsfördelar att kostnaden för en viss vecka inte är precis linjär i antalet plogar.

Lagerhållning av färdiga plogar anses kostnadsfri, men man har inte plats för att lagra fler än fyra stycken över någon helg. Försäljningen sker på fredagskvällen den sista veckan.

Produktionskostnaderna (i miljoner kr) ges i nedanstående tabell, och målet är att uppfylla behovet till minimal kostnad (eller, ekvivalent, maximal vinst).

Antal	Vecka			
	1	2	3	4
0	0	0	0	0
1	3	3	4	5
2	5	6	6	7
3	8	8	8	10

a) Hjälp Snowtrac att lösa problemet med dynamisk programmering. Skriv upp alla nödvändiga definitioner (av tillstånd etc), lös problemet och ange erhållen kostnad, produktion samt lagerhållning. Om optimallösningen inte skulle vara unik, föredrar man en optimallösning där produktionen sker så sent som möjligt.

b) Det egentliga behovet av snöplogar är ju osäkert och beror på vädret. Snowtrac ser en viss risk att kunden till slut bara vill ha fyra plogar. Snowtrac har då två möjligheter:
1. Tillverka fem plogar, och kräva kunden på ersättning om han inte vill ha alla fem, utan bara fyra.
2. Tillverka fyra, och betala kompensation till kunden om han vill ha fem.

Snowtrac bedömer att man kan kräva 2 miljoner i ersättning om kunden inte vill ha den femte plogen. Om man inte kan leverera den femte till kunden, får man betala en miljon till kunden. Snowtrac bedömer att risken för att kunden inte vill ha den femte plogen är 0.2 (dvs. 20 %). Man tar inte med något värde av den överblivna plogen om man gör fem och bara säljer fyra.

Finn därför även en optimal plan för att tillverka 4 plogar. Räkna därefter ut vilken av de två planerna Snowtrac ska följa för att maximera sin förväntade vinst. (Ledning: Förväntad vinst är summan över möjligheterna av sannolikhet multiplicerad med utfall.)

Uppgift 2

Betrakta följande blandade heltalsproblem.

$$
\begin{array}{lll}
\min & 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 10y_1 + 20y_2 & \\
\text{då} & x_1 + x_2 + x_3 \geq 5 & (1) \\
 & x_1 + x_2 \leq 5y_1 & (2) \\
 & x_2 + x_3 \leq 6y_2 & (3) \\
 & y_1 + y_2 \geq 1 & (4) \\
 & x_1, x_2, x_3 \geq 0 & \\
 & y_1, y_2 \in \{0, 1\} &
\end{array}
$$

a) Antag att problemet ska lösas med Dantzig-Wolfedekomposition, där bivillkor 2 och 3 ska relaxeras. Formulera sub- och masterproblem för detta problem (inte med generella beteckningar), med $x^{(l)}$ och $y^{(l)}$ som funna subproblemlösningar.

Beskriv kortfattat lösningsmetodiken, samt vilka övre och undre gränser som fås.

b) Man har löst subproblemet i följande punkter:
$\bar{u}_1 = 0$, $\bar{u}_2 = 0$: $g(\bar{u}) = 20$, $x_1 = 0$, $x_2 = 5$, $x_3 = 0$, $y_1 = 1$, $y_2 = 0$.
$\bar{u}_1 = 0$, $\bar{u}_2 = 10$: $g(\bar{u}) = -25$, $x_1 = 5$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $y_1 = 0$, $y_2 = 1$.
$\bar{u}_1 = 10$, $\bar{u}_2 = 10$: $g(\bar{u}) = -15$, $x_1 = 5$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $y_1 = 1$, $y_2 = 1$.

Räkna ut subgradienterna i dessa tre punkter. Räkna ut Dantzig-Wolfesnitten från dessa lösningar och sätt upp masterproblemet med dessa snitt.

c) Masterproblemet ger nu lösningen $u_1 = 2$ och $u_2 \approx 2.27$ med målfunktionsvärdet 31.36. Lös subproblemet i denna punkt. Summera nu vad du vet med hjälp av undre och övre gränser. Beräkna en subgradient i punkten med hjälp av subproblemlösningen. Är optimum funnet?

d) Räkna ut Dantzig-Wolfesnittet från subproblemlösningen i uppgift c. Lägg till det i masterproblemet. Är $u_1 = 0$ och $u_2 = 5/3 \approx 1.667$ en optimallösning? Använd master- och subproblem för att kolla detta.

Uppgift 3

Betrakta följande blandade heltalsproblem.

$$
\begin{array}{rl}
\min & 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 10y_1 + 20y_2 \\
\text{då} & x_1 + x_2 + x_3 \geq 5 \quad (1) \\
& -x_1 - x_2 \geq -5y_1 \quad (2) \\
& -x_2 - x_3 \geq -6y_2 \quad (3) \\
& y_1 + y_2 \geq 1 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0 \\
& y_1, y_2 \in \{0, 1\}
\end{array}
$$

(Bivillkor 2 och 3 kan skrivas $x_1 + x_2 \leq 5y_1$ och $x_2 + x_3 \leq 6y_2$.)

a) Antag att problemet ska lösas med Bendersdekomposition, där y är svåra variabler. Formulera sub- och masterproblem för detta problem (inte med generella beteckningar), med $u^{(l)}$ som funna duallösningar till subproblemet. Tips: Gå via LP-dualen till subproblemet.

Beskriv kortfattat lösningsmetodiken, samt vilka övre och undre gränser som fås.

b) Man har löst subproblemet i följande punkter:
$\bar{y}_1 = 1$, $\bar{y}_2 = 1$: $h(\bar{y}) = 40$, $x_1 = 0$, $x_2 = 5$, $x_3 = 0$. $u_1 = 4$, $u_2 = 2$, $u_3 = 0$.
$\bar{y}_1 = 1$, $\bar{y}_2 = 0$: $h(\bar{y}) = 25$, $x_1 = 5$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$. $u_1 = 3$, $u_2 = 0$, $u_3 = 1$.
$\bar{y}_1 = 0$, $\bar{y}_2 = 1$: $h(\bar{y}) = 40$, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 5$. $u_1 = 4$, $u_2 = 2$, $u_3 = 0$.

Räkna ut Benderssnitten från dessa lösningar och sätt upp det fullständiga Bendersmasterproblemet.

Verifiera att den bästa av ovanstående lösningar är optimal genom att stoppa in i masterproblemet och beräkna målfunktionsvärdet.

Uppgift 4

Betrakta ett min-problem och Lagrangerelaxation av ett bivillkor, dvs. där u är en skalär och inte en vektor. Vi har löst subproblemet för vissa värden på u och vill beskriva den duala funktionen $g(u)$ så bra som möjligt.

a) Man kan skissa den duala funktionen, $g(u)$, genom att rita in linjer på rätt höjd, $g(\bar{u})$, och med rätt lutning, ξ, och låta $g(u)$ beskrivas av minimum av dessa linjer. Vilka brister i beskrivningen av $g(u)$ kan detta ge? Får man alltid övre eller undre gränser till den riktiga funktionen? Motivera.

b) Ett annat sätt är att rita in punkter på rätt höjd, $g(\bar{u})$, och sedan förbinda närliggande punkter med raka streck. Vilka brister i beskrivningen av $g(u)$ kan detta ge? Får man alltid övre eller undre gränser till den riktiga funktionen? Motivera.

c) Antag att man kan få fram flera optimallösningar vid en lösning av subproblemet (om inte optimum är unikt). Kan detta hjälpa till att ge en bättre beskrivning av $g(u)$ och i så fall hur?

d) Vad vet man om $g(u)$? (Konvex? Konkav? Kontinuerlig? Differentierbar? Större eller mindre än något?)

Uppgift 5

Utgå från projekt 1, Returpack.

a) Antag att man har två olika sorters transportbilar som man skulle kunna använda till transporterna till och från mellanlagren, dels den vanliga och dels en ny, mer avancerad variant som komprimerar tomförpackningarna bättre, men kostar mer i inköp. Man vill låta optimeringen bestämma om man ska köpa in den nya varianten. Beskriv hur modellen kan ändras för att få med denna möjlighet.

b) Antag att grossisterna bildar kartell, och kräver att alla eller ingen ska få ta hand om tomförpackningar. Beskriv hur modellen kan förändras för att få med denna begränsning. (Vi kan inte lita på turen, dvs. att det skulle råka bli så utan ändring av modellen.)

Uppgift 6

Utgå från projekt 2, laddhybrid.

Beskriv hur er dynamiska programmeringsmetod kan ändras för att hantera följande utvidgningar, eller förklara varför det inte skulle gå.

- Det kostar att ändra framdrivningssätt, och kostnaden beror på vilka lägen man ändrar mellan.

- Det är inte helt säkert hur mycket laddningen sjunker, utan det beror lite på slumpmässiga faktorer, såsom väder och annan trafik (dvs. faktorer som vi inte känner till i förväg).

- Vägen är inte given, och man vill finna optimal väg samtidigt som man finner optimalt framdrivningssätt. Man kan anta att vi på ett artificiellt sätt kan omvandla de möjliga vägarna till ett acykliskt nivåindelat nätverk.

Uppgift 7

Utgå från projekt 3, Sveriges elnät.

a) Ge en “naiv” beskrivning av Bendersdekomposition på detta problem för någon som inte kan optimering. Målet är att den personen ska tro på att metoden fungerar och till slut ger den bästa lösningen.

b) Benderssnitten ser ju (som bekant) ut på följande sätt.

$$q \geq \sum_{i \in N} b_i \alpha_i^{(l)} - \sum_{(i,j) \in A} u_{ij} \beta_{ij}^{(l)} y_{ij} \quad \text{för alla } l$$

där $\beta_{ij} = 0$ om $\hat{c}_{ij} \geq 0$, och $\beta_{ij} = -\hat{c}_{ij}$ om $\hat{c}_{ij} < 0$. α är nodpriser och $\hat{c}_{ij}$ är reducerade kostnader från subproblemet.

Försök motivera (för en som kan viss optimering såsom simplexmetoden men inte Bendersdekomposition) varför dessa bivillkor ger bättre y-lösningar.

Uppgift 8

Utgå från projekt 4, snöröjning.

Koden SNOWPLAN innehåller flera olika möjligheter att förbättra lösningen (för lokalsökning) och att förändra lösningen (för simulerad kylning). Beskriv de som finns samt några som man skulle kunna lägga till.

Appendix

Lagrangedual: $v_L = \max g(u_1)$ då $u_1 \geq 0$ (PL)

Lagrangerelaxation:
$$\begin{array}{rlrcl} g(\bar{u}_1) = & \min & c^T x + \bar{u}_1^T(Ax-b) & & \\ & \text{då} & Bx & \leq & d \\ & & x & \geq & 0 \end{array} \quad \text{(DS)}$$

$X = \{x : Bx \leq d,\ x \geq 0\}$ med extrempunkter $x^{(k)}\ \forall k \in P_X$.
Subgradient: $\xi = (A\bar{x} - b)$ där $\bar{x}$ är optimal i DS.
Om $0 \in \partial g(\bar{u})$ och $\bar{u} \geq 0$ så är $\bar{u}$ optimal.
Om $\exists \xi \in \partial g(\bar{u}) :\ \xi^T \bar{u} = 0,\ \xi \leq 0$ och $\bar{u} \geq 0$ så är $\bar{u}$ optimal.

Dantig-Wolfes masterproblem ($P'_X \subseteq P_X$):

$$\begin{array}{rll} v_{DM} = & \min & \sum_{k \in P'_X} c^T x^{(k)} \lambda_k \\ & \text{då} & \sum_{k \in P'_X} (A_1 x^{(k)} - b_1)\lambda_k \leq 0 \\ & & \sum_{k \in P'_X} \lambda_k = 1 \\ & & \lambda_k \geq 0\ \ \forall k \in P'_X \end{array} \quad \text{(DMP)}$$

eller
$$\begin{array}{rll} v_{DM} = & \max & q \\ & \text{då} & q \leq c^T x^{(k)} + u_1^T(A_1 x^{(k)} - b_1) \quad \forall k \in P'_X \\ & & u_1 \geq 0 \end{array} \quad \text{(DM)}$$

Bendersdekomposition på problemet:

$v^* = \min c^T x + f(y)$ då $Ax + G(y) \leq b,\ x \geq 0,\ y \in S$

Benders subproblem:

$$\begin{array}{rll} h(\bar{y}) = f(\bar{y}) + & \min & c^T x \\ & \text{då} & Ax \leq b - G(\bar{y}) \\ & & x \geq 0 \end{array} \quad \text{(PSP)}$$

eller
$$\begin{array}{rll} h(\bar{y}) = f(\bar{y}) + & \max & (G(\bar{y}) - b)^T u \\ & \text{då} & -A^T u \leq c \\ & & u \geq 0 \end{array} \quad \text{(PS)}$$

Benders masterproblem:

$$\begin{array}{rlll} v_{PM} = & \min & q & \\ & \text{då} & q \geq f(y) + (G(y) - b)^T u^{(k)} & \forall k \in P'_U \\ & & 0 \geq (G(y) - b)^T \tilde{u}^{(k)} & \forall k \in R'_U \\ & & y \in S & \end{array} \quad \text{(PM)}$$