Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP61/TEN 1
OPTIMERING AV REALISTISKA SAMMANSATTA SYSTEM

Datum:	23 april 2014
Tid:	14.00-19.00
Hjälpmedel:	Miniräknare
	Kurslitteratur: Kaj Holmberg: *Optimering*
	Anteckningar i boken får förekomma.
Antal uppgifter:	8
Antal sidor:	6
	Uppgifterna är *inte* ordnade efter svårighetsgrad.
	Totalt antal poäng är 40. För godkänt krävs 16 poäng.
Examinator:	Kaj Holmberg
Jourhavande lärare:	Kaj Holmberg, tel 013-282867

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa dina beräkningar och din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden du gör.
Använd de standardmetoder som ingår i kursen.

Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla endast en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget vilka uppgifter du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.

Tentan består av 8 uppgifter om 5 poäng var. De fyra första uppgifterna behandlar metoder i allmänhet, och kan innehålla beräkningar. De fyra sista uppgifterna behandlar projekten. Till dessa uppgifter finns inte alltid svar som är rätt eller fel, och i sådana fall belönas en tydlig och relevant diskussion som visar relevanta kunskaper. (Undantagsvis kan en *mycket* väl besvarad uppgift ge mer än 5 poäng.)

Uppgift 1

TNT-Harry brygger egen öl. Han har nu (1:a april) 2 fat i lager. Han har fått beställningar från restauranger i trakten på två fat till maj, ett fat till juni, inget i juli och tre fat till augusti. Leveranserna sker i början av månaden. Han måste alltså brygga 4 fat till under de fyra månaderna april, maj, juni och juli, och kan inte brygga mer än två fat per månad. I juli har han semester, och vill brygga högst ett fat. Harrys produktionskostnader beror på hans alternativsysselsättning, och ges i nedanstående tabell.

Antal	Månad			
	april	maj	juni	juli
0	0	0	0	0
1	3	4	5	6
2	5	6	7	-

Till detta kommer en lagerhållningskostnad som uträknas vid månadsskiftet, dvs. strax innan försäljningen. Två fat kan lagras gratis, ty de får plats i hans garage, men de därutöver kostar 1 per fat och månad. Målet är att uppfylla behovet till minimal kostnad. Harry vill inte ha något i lager efter försäljningen i augusti.

a) Hjälp Harry att lösa problemet med dynamisk programmering. Skriv upp alla nödvändiga definitioner (av tillstånd etc), lös problemet och ange erhållen kostnad, produktion samt lagerhållning.

b) Hur förändras lösningen om Harry vill vara helt ledig i juli, och därför inte kan göra något den månaden?

Uppgift 2

Betrakta följande linjära optimeringsproblem.

$$\begin{array}{lrcrcl} \text{min v} = & -x_1 & - & 2x_2 & & \\ \text{då} & x_1 & + & x_2 & \leq & 10 \\ & & 0 \leq x_1 \leq 8 & & & \\ & & 0 \leq x_2 \leq 5 & & & \end{array}$$

a) Antag att problemet ska lösas med Dantzig-Wolfedekomposition, där det första bivillkoret ska relaxeras. Formulera sub- och masterproblem för detta problem (inte med generella beteckningar), med $x^{(l)}$ som funna subproblemlösningar.

Beskriv kortfattat lösningsmetodiken, samt vilka övre och undre gränser som fås.

b) Man har löst subproblemet i följande punkter:
$\bar{u} = 0$: $g(\bar{u}) = -18$, $x_1 = 8$, $x_2 = 5$.
$\bar{u} = 10$: $g(\bar{u}) = -100$, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$.

$\bar{u} = 1.38$: $g(\bar{u}) = -16.9$, $x_1 = 0$, $x_2 = 5$.

Räkna ut subgradienterna i dessa tre punkter. Räkna ut Dantzig-Wolfesnitten från dessa lösningar och sätt upp masterproblemet med dessa snitt.

c) Masterproblemet ger nu lösningen $u = 1$ med målfunktionsvärdet -15. Lös subproblemet i denna punkt. Summera nu vad du vet med hjälp av undre och övre gränser. Är optimum funnet?

d) Är $x_1 = 5$ och $x_2 = 5$ en optimallösning till problemet? Använd master- och subproblem för att kolla detta.

Uppgift 3

Betrakta följande optimeringsproblem.

$$
\begin{array}{lcrcrcrcl}
\text{min v} & = & 2x_1 & + & 3x_2 & + & 2y & & \\
\text{då} & & x_1 & + & 2x_2 & + & y & \geq & 3 \\
& & 2x_1 & - & 2x_2 & + & 3y & \geq & 4 \\
& & x_1, & & x_2, & & y & \geq & 0
\end{array}
$$

a) Antag att problemet ska lösas med Bendersdekomposition, där y är den svåra variabeln. Formulera sub- och masterproblem för detta problem (inte med generella beteckningar), med $u^{(l)}$ som funna duallösningar till subproblemet. Tips: Gå via LP-dualen till subproblemet.

Beskriv kortfattat lösningsmetodiken, samt vilka övre och undre gränser som fås.

b) Man har löst subproblemet i följande punkter:
$\bar{y} = 0$: $h(\bar{y}) = 17/3 = 5.667$, $x_1 = 7/3 = 2.333$, $x_2 = 1/3 = 0.333$.
$u_1 = 5/3 = 1.667$, $u_2 = 1/6 = 0.167$.
$\bar{y} = 3$: $h(\bar{y}) = 6$, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$. $u_1 = 0$, $u_2 = 0$.
$\bar{y} = 2.61$: $h(\bar{y}) = 5.805$, $x_1 = 0$, $x_2 = 0.195$. $u_1 = 1.5$, $u_2 = 0$.
$\bar{y} = 1.75$: $h(\bar{y}) = 5.375$, $x_1 = 0$, $x_2 = 0.625$. $u_1 = 1.5$, $u_2 = 0$.

Räkna ut Benderssnitten från dessa lösningar och sätt upp det fullständiga Bendersmasterproblemet.

Man har även noterat att $y \leq 3$ krävs för att subproblemet ska ha tillåten lösning, så man lägger till det snittet till masterproblemet.

Verifiera att den bästa av ovanstående lösningar är optimal genom att stoppa in i masterproblemet och beräkna målfunktionsvärdet.

Uppgift 4

a) Beskriv varför Dantzig-Wolfedekomposition alltid avslutas inom ett ändligt antal iterationer och varför man kan förvänta sig få den primala optimala lösningen. Ange (i ord) en övre gräns på antalet iterationer som behövs.

b) Beskriv varför Bendersdekomposition alltid avslutas inom ett ändligt antal iterationer och varför man kan förvänta sig få den primala optimala lösningen. Ange (i ord) en övre gräns på antalet iterationer som behövs.

c) Beskriv varför och under vilka villkor Lagrangerelaxation med subgradientoptimering kan förväntas ge den optimala primala resp. duala lösningen.

d) Skriv något motiverat om linjesökning och subgradientoptimering.

Uppgift 5

Utgå från projekt 1, Returpack.

a) Beskriv i ord den matematiska modellen ni implementerade. Varje variabel- och bivillkorsgrupp ska nämnas.

b) Beskriv två aspekter som inte togs med, men som kanske borde tas med (motivera detta) samt beskriv kort (i ord) hur modellen förändras om de tas med.

Uppgift 6

Utgå från projekt 2, laddhybrid.

a) Beskriv hur olika dimensioner i problemet påverkar svårighetsgraden (för er kod) att lösa problemet. Hur växer antalet operationer som måste göras?

b) Beskriv två saker som er kod ej kan hantera (motivera varför inte) som vore bra att ha med (motivera även detta) samt beskriv kort hur man skulle behöva ändra koden/metoden.

Uppgift 7

Utgå från projekt 3, Sveriges elnät.

a) Beskriv problemet i detalj. Vad är givet och vad sökes? Vilka indata borde kanske inte vara helt givna?

b) Hur ökar svårighetsgraden (för den använda metoden) om olika storlekar i problemet ökar? Föreslå en annan (bättre) lösningsmetod i de fall då Benders-dekomposition inte verkar vara bäst. (Med "bra" menas effektiv, snabb.)

Uppgift 8

Utgå från projekt 4, snöröjning.

a) Hur påverkas problemets svårighetsgrad av de olika storlekarna i problemet? Notera speciellt skillnaderna mellan de olika angreppssätt som användes.

b) Beskriv en matematisk modell för problemet. (Jag skulle göra det med matematisk notation, för att vara säker på att få allt exakt, men det går också att göra i ord. Det gäller dock även då att få med allt.)

Appendix

Lagrangedual: $v_L = \max g(u_1)$ då $u_1 \geq 0$ (PL)

Lagrangerelaxation:
$$\begin{array}{rlrcl} g(\bar{u}_1) = & \min & c^T x + \bar{u}_1^T (Ax - b) & & \\ & \text{då} & Bx & \leq & d \\ & & x & \geq & 0 \end{array} \qquad \text{(DS)}$$

$X = \{x : Bx \leq d,\ x \geq 0\}$ med extrempunkter $x^{(k)}$ $\forall k \in P_X$.
Subgradient: $\xi = (A\bar{x} - b)$ där $\bar{x}$ är optimal i DS.
Om $0 \in \partial g(\bar{u})$ och $\bar{u} \geq 0$ så är $\bar{u}$ optimal.
Om $\exists \xi \in \partial g(\bar{u}) :\ \xi^T \bar{u} = 0,\ \xi \leq 0$ och $\bar{u} \geq 0$ så är $\bar{u}$ optimal.

Dantig-Wolfes masterproblem ($P'_X \subseteq P_X$):

$$\begin{array}{rll} v_{DM} = & \min & \sum_{k \in P'_X} c^T x^{(k)} \lambda_k \\ & \text{då} & \sum_{k \in P'_X} (A_1 x^{(k)} - b_1) \lambda_k \leq 0 \\ & & \sum_{k \in P'_X} \lambda_k = 1 \\ & & \lambda_k \geq 0 \ \ \forall k \in P'_X \end{array} \qquad \text{(DMP)}$$

eller
$$\begin{array}{rll} v_{DM} = & \max & q \\ & \text{då} & q \leq c^T x^{(k)} + u_1^T (A_1 x^{(k)} - b_1) \quad \forall k \in P'_X \\ & & u_1 \geq 0 \end{array} \qquad \text{(DM)}$$

Bendersdekomposition på problemet:

$v^* = \min c^T x + f(y)$ då $Ax + G(y) \leq b,\ x \geq 0,\ y \in S$

Benders subproblem:

$$\begin{array}{rll} h(\bar{y}) = f(\bar{y}) + & \min & c^T x \\ & \text{då} & Ax \leq b - G(\bar{y}) \\ & & x \geq 0 \end{array} \qquad \text{(PSP)}$$

eller
$$\begin{array}{rll} h(\bar{y}) = f(\bar{y}) + & \max & (G(\bar{y}) - b)^T u \\ & \text{då} & -A^T u \leq c \\ & & u \geq 0 \end{array} \qquad \text{(PS)}$$

Benders masterproblem:

$$\begin{array}{rlll} v_{PM} = & \min & q & \\ & \text{då} & q \geq f(y) + (G(y) - b)^T u^{(k)} & \forall k \in P'_U \\ & & 0 \geq (G(y) - b)^T \tilde{u}^{(k)} & \forall k \in R'_U \\ & & y \in S & \end{array} \qquad \text{(PM)}$$