Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP61/TEN 1
OPTIMERING AV REALISTISKA SAMMANSATTA SYSTEM

Datum:	26 augusti 2014
Tid:	8.00-13.00
Hjälpmedel:	Miniräknare
	Kurslitteratur: Kaj Holmberg: *Optimering*
	Anteckningar i boken får förekomma.
Antal uppgifter:	8
Antal sidor:	6
	Uppgifterna är *inte* ordnade efter svårighetsgrad.
	Totalt antal poäng är 40. För godkänt krävs 16 poäng.
Examinator:	Kaj Holmberg
Jourhavande lärare:	Kaj Holmberg, tel 013-282867

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa dina beräkningar och din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden du gör.
Använd de standardmetoder som ingår i kursen.

Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla endast en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget vilka uppgifter du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.

Tentan består av 8 uppgifter om 5 poäng var. De fyra första uppgifterna behandlar metoder i allmänhet, och kan innehålla beräkningar. De fyra sista uppgifterna behandlar projekten. Till dessa uppgifter finns inte alltid svar som är rätt eller fel, och i sådana fall belönas en tydlig diskussion som visar relevanta kunskaper.

Uppgift 1

Valle ska flytta från Kiruna till Linköping för att plugga. Han har lånat en skåpbil (av märket Viktor) av morbror Ville, med villkoret att han inte lastar i mer än 100 kg, eftersom fjädrarna i bilen inte håller för mer. Valle vill av naturliga skäl bara köra en gång.

Han tittar sig om i sitt rum och konstaterar att grejorna han skulle vilja ta med väger mer än 100 kg, så han får välja. Det han inte tar med får Ville sälja på loppis (med försumbar vinst).

Valle klumpar ihop sina saker till ett fåtal enheter och uppskattar vikten av varje enhet samt vad det skulle vara värt för honom att ta med den, se nedanstående tabell. Han vill självklart ta med de saker som ger högst totalt värde, men som inte överlastar Viktor.

Sak	Vikt	Värde
Bokhylla med alla deckare	32 kg	8
Musikanläggning med alla CD-skivor	15 kg	5
Säng och sängkläder	15 kg	3
Dator med kringutrustning	10 kg	9
Favoritfåtöljen	23 kg	7
Cykel	16 kg	6
Moped	80 kg	2
Köksutrustning	35 kg	4

a) Valle vill lösa problemet med dynamisk programmering. Skriv upp alla nödvändiga definitioner (av tillstånd etc) och beskriv kort hur det ska gå till. (Lös ej.)

b) Valle inser att både antalet enheter att välja mellan och den maximala vikten Viktor kan ta spelar stor roll för hur svårt problemet blir att lösa med dynamisk programmering. Förklara varför.

c) Valle bestämmer sig för att förenkla problemet. Han bestämmer sig för att lämna mopeden samt köksutrustningen. Däremot bestämmer han sig för att fåtöljen och cykeln måste tas med. Nu återstår 61 kg av Viktors kapacitet. Det tycker Valle fortfarande är för mycket. Därför bestämmer han sig för att bara räkna i hela enheter om 10 kg. Han avrundar därför alla vikter till närmaste 10 kg, vilket ger bivillkoret $30x_1 + 20x_2 + 20x_3 + 10x_4 \leq 60$, vilket är detsamma som $3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 6$. Nu känner Valle att problemet går att lösa. Gör detta åt honom. Ange vad som ska tas med och vad värdet blir. Kolla därefter om lösningen faktiskt är tillåten.

d) Blir det någon större skillnad på lösningen om Valle är extra försiktig och bara lastar 50 kg i Viktor? Utnyttja lösningen i uppgift c.

Uppgift 2

Betrakta problemet i uppgift 1c, utan avrundingen:

$$
\begin{array}{rll}
\min & -8x_1 - 5x_2 - 3x_3 - 9x_4 & \\
\text{då} & 32x_1 + 15x_2 + 15x_3 + 10x_4 \leq 61 & (1) \\
 & 0 \leq x_j \leq 1 \ \forall j &
\end{array}
$$

a) Applicera Lagrangedualitet på problemet. Relaxera bivillkor 1. Skriv upp Lagrangerelaxationen.

Beräkna de undre gränser som fås för värdena 0, 1 och 0.5 på Lagrangemultiplikatorn. Beräkna även subgradienterna som fås i dessa punkter.

b) Antag att problemet ska lösas med Dantzig-Wolfedekomposition, där bivillkor 1 ska relaxeras. Formulera sub- och masterproblem för detta problem (inte med generella beteckningar), med $x^{(l)}$ som funna subproblemlösningar. Beskriv kortfattat lösningsmetodiken, samt vilka övre och undre gränser som fås.

c) Den tillåtna mängden till subproblemet har alla kombinationer av 0 och 1 som hörnpunkter. Varje hörnpunkt ger ett möjligt snitt i masterproblemet. (Det blir ganska många.)

Beräkna Dantzig-Wolfesnitten som fås av punkterna (0,0,0,0), (1,1,1,1), (1,1,0,1) och (1,0,0,1). Skissa den duala funktionen och beräkna den duala punkt där de bästa snitten möts. (Ledning: Titta på koefficienten framför u i snitten.)

Beräkna den övre gränsen som masterproblemet ger i den punkten. Lös därefter subproblemet i den punkten, och jämför den därvid erhållna undre gränsen med den övre.

Uppgift 3

Betrakta problemet i uppgift 1c, utan avrundingen, vilket också är problemet i uppgift 2.

a) Valle funderar på att sätta på en liten släpvagn på Viktor, vilket skulle ge kapacitet för ytterligare 10 kg, till en kostnad av 1.5 (i samma sort som hans värderingskoefficienter). Lönar det sig att göra detta?

Vi vill finna svaret genom att använda Bendersdekomposition på LP-relaxationen av problemet, där den svåra variabeln, y, är en binär variabel för om släpvagnen ska tas med eller ej. Formulera sub- och masterproblem för detta problem (inte med generella beteckningar), med $u^{(l)}$ som funna duallösningar till subproblemet. Tips: Gå via LP-dualen till subproblemet. Beskriv kortfattat lösningsmetodiken, samt vilka övre och undre gränser som fås.

b) "Lös" problemet genom att helt fräckt beräkna Benderssnitten för $y = 0$ och för $y = 1$, och sedan lösa masterproblemet grafiskt (vilket ju handlar om att se om $y = 0$ eller $y = 1$ är bäst.)

Ledning: För $y = 0$ har LP-relaxationen den duala lösningen $u = 0.2$, och samma duala lösning är faktiskt optimal även för $y = 1$.

Obs: Uppgiften handlar om att visa att man kan Bendersdekomposition. Att hitta lösningen på annat sätt ger inga poäng.

Uppgift 4

a) Varför kan man inte lösa ett rent heltalsproblem med Bendersdekomposition?

b) Varför kan man inte lösa ett blandat heltalsproblem med Dantzig-Wolfe-dekomposition?

c) Varför kan man inte lösa ett LP-problem med Lagrangerelaxation och subgradientoptimering (i den meningen att man säkert får den optimala lösningen)?

d) Ett kappsäcksproblem har som bekant bara ett bivillkor, och kan lösas med dynamisk optimering. Hur kan man göra om man har tio liknande bivillkor och vill använda dynamisk programmering?

Uppgift 5

Utgå från projekt 1, Returpack.

a) Beskriv i ord den matematiska modellen ni implementerade. Varje variabel- och bivillkorsgrupp ska nämnas.

b) Ange två antaganden i modellen som kan vara svåra att försvara (och förklara varför).

Uppgift 6

Utgå från projekt 2, laddhybrid.

Antag att er kod kommer att finnas med i nya laddhybrider. Beskriv hela situationen runt detta, dvs. vilka indata måste tas fram, hur kan det ske, och hur optimallösningen kan användas. (Fokusera mer på informationsflödet än på det tekniska.)

Uppgift 7

Utgå från projekt 3, Sveriges elnät.

a) Beskriv problemet i detalj. Vad är givet och vad sökes?

b) Ange tre andra, liknande, tillämpningar där samma lösningsmetod kan användas. Förklara hur.

Uppgift 8

Utgå från projekt 4, snöröjning.

a) Beskriv så principiellt som möjligt vilket optimeringsproblem man vill lösa. Prata inte snö, utan beskriv det som ett neutralt optimeringsproblem.

b) Ange två andra tillämpningar (ej snö) där samma metoder kan användas. Motivera.

Appendix

Lagrangedual: $v_L = \max g(u_1)$ då $u_1 \geq 0$ (PL)

Lagrangerelaxation:
$$\begin{array}{rlrcl} g(\bar{u}_1) = & \min & c^T x + \bar{u}_1^T(Ax-b) & & \\ & \text{då} & Bx & \leq & d \\ & & x & \geq & 0 \end{array} \quad \text{(DS)}$$

$X = \{x : Bx \leq d,\ x \geq 0\}$ med extrempunkter $x^{(k)}\ \forall k \in P_X$.
Subgradient: $\xi = (A\bar{x} - b)$ där $\bar{x}$ är optimal i DS.
Om $0 \in \partial g(\bar{u})$ och $\bar{u} \geq 0$ så är $\bar{u}$ optimal.
Om $\exists \xi \in \partial g(\bar{u}) :\ \xi^T \bar{u} = 0,\ \xi \leq 0$ och $\bar{u} \geq 0$ så är $\bar{u}$ optimal.

Dantig-Wolfes masterproblem ($P'_X \subseteq P_X$):

$$\begin{array}{rll} v_{DM} = & \min & \sum_{k \in P'_X} c^T x^{(k)} \lambda_k \\ & \text{då} & \sum_{k \in P'_X} (A_1 x^{(k)} - b_1)\lambda_k \leq 0 \\ & & \sum_{k \in P'_X} \lambda_k = 1 \\ & & \lambda_k \geq 0 \ \ \forall k \in P'_X \end{array} \quad \text{(DMP)}$$

eller
$$\begin{array}{rll} v_{DM} = & \max & q \\ & \text{då} & q \leq c^T x^{(k)} + u_1^T(A_1 x^{(k)} - b_1) \quad \forall k \in P'_X \\ & & u_1 \geq 0 \end{array} \quad \text{(DM)}$$

Bendersdekomposition på problemet:

$v^* = \min c^T x + f(y) \quad$ då $Ax + G(y) \leq b,\ x \geq 0,\ y \in S$

Benders subproblem:

$$\begin{array}{rll} h(\bar{y}) = f(\bar{y}) + & \min & c^T x \\ & \text{då} & Ax \leq b - G(\bar{y}) \\ & & x \geq 0 \end{array} \quad \text{(PSP)}$$

eller
$$\begin{array}{rll} h(\bar{y}) = f(\bar{y}) + & \max & (G(\bar{y}) - b)^T u \\ & \text{då} & -A^T u \leq c \\ & & u \geq 0 \end{array} \quad \text{(PS)}$$

Benders masterproblem:

$$\begin{array}{rlll} v_{PM} = & \min & q & \\ & \text{då} & q \geq f(y) + (G(y) - b)^T u^{(k)} & \forall k \in P'_U \\ & & 0 \geq (G(y) - b)^T \tilde{u}^{(k)} & \forall k \in R'_U \\ & & y \in S & \end{array} \quad \text{(PM)}$$