Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP61/TEN 1
OPTIMERING AV REALISTISKA SAMMANSATTA SYSTEM

Datum:	14 januari 2015
Tid:	8.00-13.00
Hjälpmedel:	Miniräknare Kurslitteratur: Kaj Holmberg: *Optimering* Anteckningar i boken får förekomma.
Antal uppgifter:	8
Antal sidor:	7 Uppgifterna är *inte* ordnade efter svårighetsgrad. Totalt antal poäng är 40. För godkänt krävs 16 poäng.
Examinator:	Kaj Holmberg
Jourhavande lärare:	Kaj Holmberg, tel 013-282867

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa dina beräkningar och din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden du gör.
Använd de standardmetoder som ingår i kursen.

Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla endast en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget vilka uppgifter du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.

Tentan består av 8 uppgifter om 5 poäng var. De fyra första uppgifterna behandlar metoder i allmänhet, och kan innehålla beräkningar. De fyra sista uppgifterna behandlar projekten. Till dessa uppgifter finns inte alltid svar som är rätt eller fel, och i sådana fall belönas en tydlig diskussion som visar relevanta kunskaper.

Uppgift 1

Riskkapitalföretaget Monetero funderar på hur man ska "riskera sitt kapital" (dvs. investera, köpa, sälja). Man har just nu 5 miljarder i kassan, och har sett ut ett antal möjliga objekt som man skulle kunna köpa nu och sälja om tre år. Det första är skolföretaget Learnot, det andra är modeföretaget Wearnot, det tredje är vårdföretaget Carenot, det fjärde är Returpack och det femte är snöröjningsföretaget Snowmovers.

Varje år man äger ett företag, måste man investera en viss mängd pengar för att behålla/öka företagets värde. Man har beräknat den total kostnaden för varje projekt (inköpspris plus investeringar), och har uppskattat den framtida vinsten av varje projekt. Vinsterna uppstår vid försäljningen efter de tre åren, och kan därför inte utnyttjas till investeringarna, utan nuvarande kapital måste räcka till alla kostnader. Målet är helt enkelt att maximera den framtida vinsten, utan att betala mer än vad man har (dvs. utan att låta det egna kapitalet bli negativt). Förväntade kostnader/vinster ges i följande tabell (sort miljarder). (Siffrorna är avrundade.)

Företag	Kostnad	Vinst
Learnot	3	4
Wearnot	4	6
Carenot	2	3
Returpack	4	5
Snowmovers	1	3

a) Formulera Moneteros problem som ett optimeringsproblem, med variabeldefinition, målfunktion och bivillkor.

b) Monetero anser att man borde finna bästa planen med hjälp av dynamisk programmering. Ange alla nödvändiga definitioner för att lösa problemet med dynamisk programmering. Lös problemet. Ange svar.

c) Monetero kan tänkas sig att ta ett lån på en miljard för att kunna köpa mer. Lånet är bundet i 3 år, och skulle ge den totala kostnaden 2 miljarder för de tre åren tillsammans. Skulle Monetero tjäna på att ta detta lån? (Gissa inte.)

Uppgift 2

Betrakta följande kappsäcksproblem.

$$\begin{array}{rll} \min & -6x_1 - 4x_2 - 6x_3 - 4x_4 & \\ \text{då} & 10x_1 + 8x_2 + 8x_3 + 6x_4 \leq 20 & (1) \\ & x_j \in \{0,1\}\ \forall j & \end{array}$$

a) Applicera Lagrangedualitet på problemet. Relaxera bivillkor 1. Skriv upp Lagrangerelaxationen.

Lös Lagrangerelaxationen för u lika med 0, 0.7 och 0.65. Ange de undre gränser som fås samt ev. övre gränser. Beräkna även subgradienterna som fås i dessa punkter.

b) Antag att LP-relaxationen av problemet (dvs. då bivillkoren $x_j \in \{0,1\}$ ersätts av $0 \leq x_j \leq 1$) ska lösas med Dantzig-Wolfedekomposition, där bivillkor 1 ska relaxeras. Formulera sub- och masterproblem för detta problem (inte med generella beteckningar), med $x^{(l)}$ som funna subproblemlösningar. Beskriv kortfattat lösningsmetodiken, samt vilka övre och undre gränser som fås.

c) Den tillåtna mängden till subproblemet har alla kombinationer av 0 och 1 som hörnpunkter, och varje hörnpunkt ger ett möjligt snitt i masterproblemet. Beräkna Dantzig-Wolfesnitten som fås av punkterna (0,0,0,0), (1,1,1,1), (0,0,1,0) och (0,0,1,1). Lös masterproblemet grafiskt, och beräkna den övre gränsen som masterproblemet ger, samt jämför med bästa kända undre gräns.

d) Ett noggrant studium av bivillkor 1 ger att bivillkoret i princip bara säger att $x_1+x_2+x_3+x_4 \leq 2$, om alla variabler är binära. Går ovanstående lösningsmetoder bättre om man ersätter ursprungliga bivillkor 1 med detta? Finn svaret genom att skriva upp Lagrangerelaxationen av det nya problemet, lösa den för $u = 5$, och notera övre och undre gränser.

e) Finns det något värde på u som gör att Lagrangerelaxationen i uppgift a ger samma lösning som Lagrangerelaxationen i uppgift d?

Uppgift 3

Betrakta följande blandade heltalsproblem.

$$\begin{array}{rl} \min & -5x_1 - 3x_2 + 4y \\ \text{då} & 2x_1 + 2x_2 - 2y \leq 5 \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ y \in \{0,1\} \end{array}$$

a) Beskriv hur man kan lösa detta problem med Bendersdekomposition. Formulera sub- och masterproblem för detta problem (inte med generella beteckningar), med $u^{(l)}$ som funna duallösningar till subproblemet. (Tips: Gå via LP-dualen till subproblemet.) Beskriv kortfattat lösningsmetodiken, samt vilka övre och undre gränser som fås.

b) Lös subproblemet för $y = 0$ och beräkna Benderssnittet för den erhållna lösningen. Lös Benders masterproblem grafiskt. Notera de övre och undre gränser som fås. Om masterproblemet gav $y = 1$, lös subproblemet i den punkten också. Avbryt metoden då övre och undre gräns är lika.

c) Lägg till bivillkoret $x_1 \leq 2$ till problemet ovan och använd Bendersdekomposition på samma sätt. Lös LP-dualen av subproblemet grafiskt.

Uppgift 4

Det finns en metod som heter "cross decomposition", som använder både Benders subproblem och Dantzig-Wolfes subproblem. (Den behöver också minst ett av masterproblemen för att säkert ge optimum, men det kan vi strunta i nu.) Metoden itererar alltså mellan de två subproblemen.

a) Beskriv generellt hur en sådan metod kan fungera, dvs. vilken output från ena problemet används som input till det andra och vice versa. Vilket problem ger övre gräns och vilket ger undre?

b) En mycket framgångsrik tillämpning av metoden var på det kapaciterade lokaliseringsproblemet, givet nedan.

$$
\begin{array}{lrcll}
\min & \displaystyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} + \sum_{i=1}^{m} f_i y_i & & & \\
\text{då} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_{ij} & \leq & s_i y_i & \text{för alla } i \quad (1) \\
& \displaystyle\sum_{i=1}^{m} x_{ij} & = & d_j & \text{för alla } j \quad (2) \\
& x_{ij} & \geq & 0 & \text{för alla } i,j \quad (3) \\
& y_i & \in & \{0,1\} & \text{för alla } i \quad (4)
\end{array}
$$

Beskriv hur cross decomposition kan appliceras på detta problem. Vad fixeras och vad relaxeras i de olika subproblemen? (Det är viktigt att subproblemen blir relativt lättlösta.) Beskriv också detaljerat vilken output från ena problemet används som input till det andra och vice versa. Vilket problem ger övre gräns och vilket ger undre?

Uppgift 5

Utgå från projekt 1, Returpack.

a) Antag att man vill lösa ett större Returpacksproblem, som har 10 000 butiker, 100 grossister, 10 bryggerier, 5 råvarutillverkare, 10 förpackningstillverkare och 100 möjliga platser för nya lager. Hur stort blir problemet? Dvs. hur många variabler och bivillkor blir det (ungefär)? Föreslå förenklingar av modell och metod (inom ramen för GLPK) som kan behövas för att lösa problemet. Kan man göra någon geografisk uppdelning av problemet som inte förändrar resultatet så mycket?

b) Föreslå ett eller flera sätt att angripa problemet med dekompositionsmetoder (dvs. Lagrangerelaxation, Dantzig-Wolfedekomposition, Bendersdekomposition). Vad ska relaxeras/fixeras? Hur ska subproblemen lösas?

Uppgift 6

Utgå från projekt 2, laddhybrid.

a) Antag att man kör i en trakt där det är ont om bensinmackar (t.ex. norra Sverige). Hur skulle man behöva modifiera modell och metod för att ta med bensinen i beräkningen?

b) Antag att det på vissa platser (inte så många) finns snabbladdningsstationer, där man kan ladda batteriet på 20 minuter. Det är ju inget man vill göra i onödan, men det är möjligt. Hur påverkas problemet, modellen och metoden av detta?

Uppgift 7

Utgå från projekt 3, Sveriges elnät.

a) Beskriv likheter och skillnader mellan problemet i projektet och problemet att bestämma var man ska bygga ut gator i en stad. (Eftersom alla detaljer antingen är lika eller olika, ger detta osökt en möjlighet att beskriva alla aspekter i problemet.) Passar metoderna i projektet bra till gatuutbyggnadsproblemet, eller finns det skillnader som troligtvis förhindrar det?

b) Antag att alla utbyggnader tar tid, att kapaciteten på en länk måste minskas medan utbyggnaden pågår, och att man högst kan göra ett visst antal utbyggnader samtidigt. (Dessa aspekter är relevanta för både elnätsproblemet och gatunätsproblemet.) Hur kan detta hanteras i modell och metod?

Uppgift 8

Utgå från projekt 4, snöröjning.

a) Jämför snöröjningsproblemet med problemet att hämta upp sopor. Vilka likheter och vilka skillnader finns? Kan man använda Snowplan/Vineopt för detta problem också?

b) Det finns stora likheter mellan snöröjningsproblemet och problemet att salta/sanda gator samt att sopa upp sand. En skillnad är dock att fordonet har en behållare med sand/salt som blir full/tom ibland. Då måste man åka till en påfyllningsplats/avstjälpningsplats och fylla på/tömma. Hur påverkar detta optimeringsproblemet och lösningsmetoden?

Appendix

Lagrangedual: $v_L = \max g(u_1)$ då $u_1 \geq 0$ (PL)

Lagrangerelaxation:
$$\begin{array}{rlrcl} g(\bar{u}_1) = & \min & c^T x + \bar{u}_1^T (Ax - b) & & \\ & \text{då} & Bx & \leq & d \\ & & x & \geq & 0 \end{array} \quad \text{(DS)}$$

$X = \{x : Bx \leq d,\ x \geq 0\}$ med extrempunkter $x^{(k)}$ $\forall k \in P_X$.
Subgradient: $\xi = (A\bar{x} - b)$ där $\bar{x}$ är optimal i DS.
Om $0 \in \partial g(\bar{u})$ och $\bar{u} \geq 0$ så är $\bar{u}$ optimal.
Om $\exists \xi \in \partial g(\bar{u}) :\ \xi^T \bar{u} = 0,\ \xi \leq 0$ och $\bar{u} \geq 0$ så är $\bar{u}$ optimal.

Dantig-Wolfes masterproblem ($P'_X \subseteq P_X$):

$$\begin{array}{rll} v_{DM} = & \min & \displaystyle\sum_{k \in P'_X} c^T x^{(k)} \lambda_k \\ & \text{då} & \displaystyle\sum_{k \in P'_X} (A_1 x^{(k)} - b_1) \lambda_k \leq 0 \\ & & \displaystyle\sum_{k \in P'_X} \lambda_k = 1 \\ & & \lambda_k \geq 0 \ \ \forall k \in P'_X \end{array} \quad \text{(DMP)}$$

eller
$$\begin{array}{rll} v_{DM} = & \max & q \\ & \text{då} & q \leq c^T x^{(k)} + u_1^T (A_1 x^{(k)} - b_1) \quad \forall k \in P'_X \\ & & u_1 \geq 0 \end{array} \quad \text{(DM)}$$

Bendersdekomposition på problemet:

$v^* = \min c^T x + f(y)$ då $Ax + G(y) \leq b,\ x \geq 0,\ y \in S$

Benders subproblem:

$$\begin{array}{rll} h(\bar{y}) = f(\bar{y}) + & \min & c^T x \\ & \text{då} & Ax \leq b - G(\bar{y}) \\ & & x \geq 0 \end{array} \quad \text{(PSP)}$$

eller
$$\begin{array}{rll} h(\bar{y}) = f(\bar{y}) + & \max & (G(\bar{y}) - b)^T u \\ & \text{då} & -A^T u \leq c \\ & & u \geq 0 \end{array} \quad \text{(PS)}$$

Benders masterproblem:

$$\begin{array}{rlll} v_{PM} = & \min & q & \\ & \text{då} & q \geq f(y) + (G(y) - b)^T u^{(k)} & \forall k \in P'_U \\ & & 0 \geq (G(y) - b)^T \tilde{u}^{(k)} & \forall k \in R'_U \\ & & y \in S & \end{array} \quad \text{(PM)}$$