Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP61/TEN 1
OPTIMERING AV REALISTISKA SAMMANSATTA SYSTEM

Datum:	8 april 2015
Tid:	14.00-19.00
Hjälpmedel:	Miniräknare Kurslitteratur: Kaj Holmberg: *Optimering* Anteckningar i boken får förekomma.
Antal uppgifter:	8
Antal sidor:	7 Uppgifterna är *inte* ordnade efter svårighetsgrad. Totalt antal poäng är 40. För godkänt krävs 16 poäng.
Examinator:	Kaj Holmberg
Jourhavande lärare:	Kaj Holmberg, tel 013-282867

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa dina beräkningar och din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden du gör.
Använd de standardmetoder som ingår i kursen.

Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla endast en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget vilka uppgifter du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.

Tentan består av 8 uppgifter om 5 poäng var. De fyra första uppgifterna behandlar metoder i allmänhet, och kan innehålla beräkningar. De fyra sista uppgifterna behandlar projekten. Till dessa uppgifter finns inte alltid svar som är rätt eller fel, och i sådana fall belönas en tydlig diskussion som visar relevanta kunskaper.

Uppgift 1

Vattenkraftverket vid Norra Småån ska planera vårens inställningar. Intagsluckan hanteras manuellt och det är ett tungt arbete, så man vill inte ändra inställningar speciellt ofta. Man har tre inställningar: stängt, halvöppet och öppet. Uteffekten (i GW) samt vattenavrinningen (i milj m^3) vid de olika inställningarna ges i tabellen nedan.

Man vill planera för fyra månader, och har bedömt tillrinningen av vatten (i milj m^3) som anges nedan. Man vill bara ändra inställning vid månadskiften.

Den totala vattenvolymen i dammen är 5 milj m^3 vid första månadens början. Den får aldrig överstiga 10 milj m^3, för det är vad dammen kan innehålla utan risk för översvämning. Den får givetvis inte understiga noll.

Man förväntar sig att priset på el ligger fast, och att efterfrågan är stor, så man vill helt enkelt maximera total summerad uteffekt.

	Uteffekt	Avrinning
Stängd	0	0
Halvöppen	3	3
Öppen	6	7

Månad	Tillrinning
1	3
2	5
3	3
4	1

a) Ange alla nödvändiga definitioner för att lösa problemet med dynamisk programmering. Antag att dammen ska vara tom efter månad fyra. Lös problemet. Ange svar. (Ledning: Många kombinationer är omöjliga, dvs. det blir många streck i tabellerna.)

b) Man funderar på att istället lämna kvar 4 milj m^3 i dammen efter månad 4. Detta ger troligen mindre total uteffekt, men vattnet kan ju användas längre fram och har då ett värde. Man uppskattar att varje milj m^3 i dammen efter månad 4 har samma värde som 1 GW uteffekt. Blir det då en bättre lösning än om dammen får bli tom?

Uppgift 2

Applicera Lagrangerelaxation på nedanstående problem, så att subproblemet kan lösas med grafisk lösning. (Tips: Beakta separabilitet.)

$$
\begin{aligned}
v^* = \quad \min \quad & -2x_1 - x_2 - 3x_3 - 3x_4 \\
\text{då} \quad & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 3 \\
& x_1 + x_2 \leq 2 \\
& x_3 + 2x_4 \leq 2 \\
& x_3 \leq 1 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{aligned}
$$

a) Lös subproblemet för $u = 0$, 1 och 2, och beräkna subgradienter i varje punkt, samt bästa undre och övre gräns som fås.

b) Antag att problemet ska lösas med Dantzig-Wolfedekomposition. Formulera sub- och masterproblem för detta problem (inte med generella beteckningar), med $x^{(l)}$ som funna subproblemlösningar. Beskriv kortfattat lösningsmetodiken, samt vilka övre och undre gränser som fås.

c) Beräkna Dantzig-Wolfesnitten som fås av samtliga punkter som erhölls i uppgift a. Lös masterproblemet grafiskt, och beräkna den övre gränsen som masterproblemet ger, samt jämför med bästa kända undre gräns.

d) Om man får $u > 0$ i optimallösningen, säger komplementaritetsvillkoren att det relaxerade bivillkoret ska vara uppfyllt med likhet. Utnyttja denna information för att finna den optimala konvexkombinationen av subproblemlösningarna, dvs. den optimala primala lösningen.

Uppgift 3

Betrakta följande blandade heltalsproblem.

$$
\begin{array}{llcccccl}
v^* = \min & 2x_1 & + & 3x_2 & + & 2y & & \\
\text{då} & x_1 & + & 2x_2 & + & y & \geq & 3 \\
 & 2x_1 & - & 2x_2 & + & 3y & \geq & 4 \\
 & x_1, & & x_2 & & & \geq & 0 \\
 & & & & & y & \in & \{0, 1, 2, 3\}
\end{array}
$$

a) Beskriv hur man kan lösa detta problem med Bendersdekomposition. Formulera sub- och masterproblem för detta problem (inte med generella beteckningar), med $u^{(l)}$ som funna duallösningar till subproblemet. (Tips: Gå via LP-dualen till subproblemet.) Beskriv kortfattat lösningsmetodiken, samt vilka övre och undre gränser som fås.

b) Lös subproblemet för $y = 0$ och beräkna Benderssnittet för den erhållna lösningen. Lös Benders masterproblem grafiskt. Notera de övre och undre gränser som fås. Lös subproblemet i punkten masterproblemet gav. Beräkna Benderssnittet för den erhållna lösningen. Lös Benders masterproblem grafiskt. Notera de övre och undre gränser som fås, samt ange den bästa funna tillåtna lösningen. (Ledning: Subproblemet kan lösas grafiskt, både primalt och dualt.)

Uppgift 4

a) Antag att vi använder Lagrangerelaxation på ett kappsäcksproblem, där kappsäcksvillkoret relaxeras. Subproblemet har då bara bivillkoren $x \in \{0, 1\}$. Under vilka förutsättningar (för koefficienterna i problemet) vet vi att bara heltaliga värden på Lagrangemultiplikator u är intressanta?

b) Antag att vi istället har krav på att variablerna ska ha heltaliga värden i ett intervall som inte innehåller noll, dvs $x \in \{l, l + 1, \ldots, u - 1, u\}$, där $0 < l < u$. Då kan det hända att problemet saknar tillåten lösning. Hur skulle man märka det om man använder Lagrangerelaxation och subgradientoptimering?

c) Antag istället att variablerna inte har någon övre gräns, utan kan bli hur stora som helst. Vilken egenskap kommer då optimallösningen till LP-relaxationen att få? Vilka egenskaper får då optimallösningen till Lagrangerelaxationen?

d) Antag dessutom att målfunktion och kappsäcksbivillkor innehåller både positiva och negativa koefficienter. Då är det möjligt att problemet har obegränsad lösning. Hur skulle man märka det om man använder Lagrangerelaxation och subgradientoptimering?

Uppgift 5

Utgå från projekt 1, Returpack.

a) Antag att man inte vill använda några grossister alls för tomförpackningshantering om man bygger och använder mellanlager. Alternativet är att inte använda mellanlager alls. Beskriv (ganska noga) hur detta kan modelleras.

b) Antag att man har löst problemet och bestämt vilka lager som ska byggas och exakt hur transporterna ska gå, men att det plötsligt blir översvämning så att vissa transportvägar blir obrukbara, samt ett par mellanlager helt isolerade (dvs. obrukbara). Man måste då ändra transportplaneringen, men vill göra så små ändringar som möjligt från den tidigare planen. Beskriv hur man kan göra en (lösbar) optimeringsmodell för detta problem.

Uppgift 6

Utgå från projekt 2, laddhybrid.

a) Antag att det finns risk för snöstorm och motvind, så att bilen drar 20% mer el än förväntat under alla delar av resan. Kan man på ett smidigt sätt uppdatera optimal plan utan att lösa om hela problemet? Om ja, hur? Om nej, varför inte?

Antag att ovädret inträffar med sannolikhet 0.5. Kan man redan i förväg ta med detta i problemet? Hur ska då data och metod ändras?

b) Besvara samma frågor som i uppgift a för fallet där ovädret ökar alla kostnader med 20%, men elförbrukningen inte påverkas.

Uppgift 7

Utgå från projekt 3, Sveriges elnät.

a) Problemet ni löst är något förenklat. Beskriv några detaljer som skulle kunna (kanske borde) modelleras bättre och storlekar som kunde vara större, samt vad detta skulle innebära för modell och metod. Undvik saker som inte alls kan hanteras med det angreppssätt ni använt.

b) Antag (helt hypotetiskt) att behövet av el minskar, och att man därför funderar på att ta bort vissa kraftledningar. För vissa ledningar beräknar men vilken vinst man skulle göra om man tog bort ledningen (dvs. man får en intäkt c och kapaciteten går ner till noll). Beskriv hur modell och metod kan förändras så att man kan lösa detta problem. Är Bendersdekomposition fortfarande en bra ide?

Uppgift 8

Utgå från projekt 4, snöröjning.

a) Antag att man har en mingräns och en maxgräns för hur långt ett fordon får köra. Kan detta lätt införas i Snowplan (dvs. i de metoder som ingår i Snowplan)?

b) Hur kan man införa depåer i snöröjningsproblemet? (En depå är en given start- och slutplats för fordonen.) Beskriv både ändringar i modell och i metod (Snowplan). Blir något betydligt krångligare?

Appendix

Lagrangedual: $v_L = \max g(u_1)$ då $u_1 \geq 0$ (PL)

Lagrangerelaxation:
$$\begin{array}{rlrcl} g(\bar{u}_1) = & \min & c^T x + \bar{u}_1^T(Ax-b) \\ & \text{då} & Bx & \leq & d \\ & & x & \geq & 0 \end{array} \qquad \text{(DS)}$$

$X = \{x : Bx \leq d,\ x \geq 0\}$ med extrempunkter $x^{(k)}\ \forall k \in P_X$.
Subgradient: $\xi = (A\bar{x} - b)$ där $\bar{x}$ är optimal i DS.
Om $0 \in \partial g(\bar{u})$ och $\bar{u} \geq 0$ så är $\bar{u}$ optimal.
Om $\exists \xi \in \partial g(\bar{u}) :\ \xi^T\bar{u} = 0,\ \xi \leq 0$ och $\bar{u} \geq 0$ så är $\bar{u}$ optimal.

Dantig-Wolfes masterproblem ($P'_X \subseteq P_X$):

$$\begin{array}{rll} v_{DM} = & \min & \displaystyle\sum_{k\in P'_X} c^T x^{(k)}\lambda_k \\ & \text{då} & \displaystyle\sum_{k\in P'_X} (A_1 x^{(k)} - b_1)\lambda_k \leq 0 \\ & & \displaystyle\sum_{k\in P'_X} \lambda_k = 1 \\ & & \lambda_k \geq 0\ \ \forall k \in P'_X \end{array} \qquad \text{(DMP)}$$

eller
$$\begin{array}{rll} v_{DM} = & \max & q \\ & \text{då} & q \leq c^T x^{(k)} + u_1^T(A_1 x^{(k)} - b_1) \quad \forall k \in P'_X \\ & & u_1 \geq 0 \end{array} \qquad \text{(DM)}$$

Bendersdekomposition på problemet:

$v^* = \min c^T x + f(y)$ då $Ax + G(y) \leq b,\ x \geq 0,\ y \in S$

Benders subproblem:

$$\begin{array}{rll} h(\bar{y}) = f(\bar{y}) + & \min & c^T x \\ & \text{då} & Ax \leq b - G(\bar{y}) \\ & & x \geq 0 \end{array} \qquad \text{(PSP)}$$

eller
$$\begin{array}{rll} h(\bar{y}) = f(\bar{y}) + & \max & (G(\bar{y}) - b)^T u \\ & \text{då} & -A^T u \leq c \\ & & u \geq 0 \end{array} \qquad \text{(PS)}$$

Benders masterproblem:

$$\begin{array}{rlll} v_{PM} = & \min & q \\ & \text{då} & q \geq f(y) + (G(y) - b)^T u^{(k)} & \forall k \in P'_U \\ & & 0 \geq (G(y) - b)^T \tilde{u}^{(k)} & \forall k \in R'_U \\ & & y \in S \end{array} \qquad \text{(PM)}$$