Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP61/TEN 1
OPTIMERING AV REALISTISKA SAMMANSATTA SYSTEM

Datum:	25 augusti 2015
Tid:	8.00-13.00
Hjälpmedel:	Miniräknare Kurslitteratur: Kaj Holmberg: *Optimering* Anteckningar i boken får förekomma.
Antal uppgifter:	8
Antal sidor:	6 Uppgifterna är *inte* ordnade efter svårighetsgrad. Totalt antal poäng är 40. För godkänt krävs 16 poäng.
Examinator:	Kaj Holmberg
Jourhavande lärare:	Kaj Holmberg, tel 013-282867

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa dina beräkningar och din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden du gör.
Använd de standardmetoder som ingår i kursen.

Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla endast en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget vilka uppgifter du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.

Tentan består av 8 uppgifter om 5 poäng var. De fyra första uppgifterna behandlar metoder i allmänhet, och kan innehålla beräkningar. De fyra sista uppgifterna behandlar projekten. Till dessa uppgifter finns inte alltid svar som är rätt eller fel, och i sådana fall belönas en tydlig diskussion som visar relevanta kunskaper.

Uppgift 1

Bosses Bo&Trivs funderar på byggnation nästa år. Möjligheter är ett eller flera hyreshus för studenter, en eller flera villor för lite mer förmögna familjer samt en sporthall för inomhuscykling. Kostnaderna för att bygga ges av nedanstående tabeller, där x_1 står för antal hyreshus, x_2 antal villor och x_3 antal sporthallar som byggs. $a_k(x_k)$ står för anläggningskostnad och $v_k(x_k)$ står för uppskattad vinst, båda omräknade till nuvärde och skalade.

x_1	$a_1(x_1)$	$v_1(x_1)$
0	0	0
1	2	1
2	3	2
3	4	3

x_2	$a_2(x_2)$	$v_2(x_2)$
0	0	0
5	2	2
10	3	5

x_3	$a_3(x_3)$	$v_3(x_3)$
0	0	0
1	5	6

Bo&Trivs kan göra 0, 1, 2 eller 3 hyreshus, 0, 5 eller 10 villor, samt 0 eller 1 sporthall. Bosse vill maximera den total vinsten, under villkoret att den totala anläggningskostnaden inte överstiger 6. (Vinst kan inte användas för anläggningskostnader, eftersom den inkommer senare.)

a) Ange alla nödvändiga definitioner för att lösa problemet med dynamisk programmering. Lös problemet. Ange svar.

b) Bosse funderar på att minska budgeten för anläggning med 1, dvs. inte låta anläggningskostnaderna överskrida 5. Hur mycket vinst skulle den alternativa användningen av detta belopp behöva uppgå till för att han skulle tjäna på det?

c) Bosse känner att hans sociala ansvar tvingar honom att bygga en sporthall. Hur mycket skulle han förlora på detta, och vad blir lösningen då?

Uppgift 2

Applicera Lagrangerelaxation på nedanstående problem, genom att relaxera bivillkor 1 och 2.

$$
\begin{array}{rll l}
v^* = & \min & -5x_1 - 7x_2 - 3x_3 - 4x_4 & \\
& \text{då} & 2x_1 + 3x_2 - x_3 \le 3 & (1) \\
& & 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 \le 5 & (2) \\
& & 0 \le x_1, x_2, x_3, x_4 \le 1 &
\end{array}
$$

a) Lös subproblemet för $u_1 = 0$ och $u_2 = 0$. Beräkna subgradient, undre gräns och ev. övre gräns.
Lös subproblemet för $u_1 = 1$ och $u_2 = 1$. Beräkna subgradient, undre gräns och ev. övre gräns.

b) Utgå från resultatet i uppgift a. Du får öka eller minska en av multiplikatorerna

(u_1 eller u_2) lite. Vilken ska man välja så att man sannolikt får en bättre punkt, dvs. en högre undre gräns?

c) Antag att problemet ska lösas med Dantzig-Wolfedekomposition (med samma relaxation som i uppgift a). Formulera sub- och masterproblem för detta problem (inte med generella beteckningar), med $x^{(l)}$ som funna subproblemlösningar. Beskriv kortfattat lösningsmetodiken, samt vilka övre och undre gränser som fås.

d) Beräkna Dantzig-Wolfesnitten som fås av punkterna som erhölls i uppgift a, och sätt upp masterproblemet med aktuella siffror. Sätt även upp dualen av masterproblemet, och försök finna optimallösningen. Ledning: Utnyttja komplementaritetsvillkoren. Beräkna den övre gränsen som masterproblemet ger, och jämför med bästa kända undre gräns. Jämför också med svaret i uppgift b.

Uppgift 3

Betrakta följande blandade heltalsproblem.

$$
\begin{array}{llllllll}
v^* = \min & -2x_1 & - & 2x_2 & + & 2y & & \\
\text{då} & -2x_1 & - & x_2 & + & 2y & \geq & 4 \\
 & -x_1 & - & 2x_2 & + & 2y & \geq & 3 \\
 & x_1, & & x_2 & & & \geq & 0 \\
 & & & & & y & \in & \{0, 1, 2\}
\end{array}
$$

a) Beskriv hur man kan lösa detta problem med Bendersdekomposition. Formulera sub- och masterproblem för detta problem (inte med generella beteckningar), med $u^{(l)}$ som funna duallösningar till subproblemet. Beskriv kortfattat lösningsmetodiken, samt vilka övre och undre gränser som fås.

b) Lös subproblemet för $y = 0$ och beräkna Benderssnittet för den erhållna lösningen. Lös Benders masterproblem grafiskt. Notera de övre och undre gränser som fås. Lös subproblemet i punkten masterproblemet gav. Fortsätt om nödvändigt med att beräkna Benderssnittet och lösa Benders masterproblem grafiskt. Notera de övre och undre gränser som fås, samt ange den bästa funna tillåtna lösningen. (Ledning: Subproblemet kan lösas grafiskt, både primalt och dualt.)

Uppgift 4

Antag att vi har ett LP-problem (maximering), med väldigt många variabler och tre bivillkor. En viss baslösning ger följande duallösning: $y_1 = 1$, $y_2 = 3$, $y_3 = 2$.

a) Det visar sig att denna duala lösning inte är tillåten i LP-dualen. Vad betyder det för den primala lösningen?

b) Antag att vi har två icke-basvariabler, x_1 och x_2, med följande data: $c_1 = 20$, $a_1^T = (2,3,4)$ och $c_2 = 9$, $a_2^T = (2,1,2)$. Vilken av dessa vore bäst att öka? Eller är det bättre att inte öka någon?

c) Antag att bivillkorskoefficienterna för variablerna kan vara vad som helst som uppfyller bivillkoren $3a_1+2a_2+a_3 \leq 5$ och $a_1, a_2, a_3 \geq 0$, och att målfunktionskoefficienten blir $c = 4a_1 + 4a_2 + 4a_3$. Beräkna kolumnen för den bästa inkommande variabeln enligt metoden kolumngenerering.

d) Beskriv hur kolumngenerering dyker upp i Dantzig-Wolfedekomposition.

Uppgift 5

Utgå från projekt 1, Returpack.

a) Antag att vi har 10 000 butiker, 500 grossister, 100 bryggerier, 2 råvaruproducenter, 5 förpackningstillverkare och 100 möjliga mellanlager. Beskriv storleken på modellen (antal variabler/bivillkor av olika typer). Vilka av dessa dimensioner tror du påverkar lösningstiden mest?

b) Föreslå ett eller flera sätt att angripa problemet med dekompositionsmetoder (dvs. Lagrangerelaxation, Dantzig-Wolfedekomposition, Bendersdekomposition). Vad ska relaxeras/fixeras? Hur ska subproblemen lösas?

Uppgift 6

Utgå från projekt 2, laddhybrid.

a) Antag att vår (kända) färdväg passerar ett antal snabbladdningsstationer, där man skulle kunna stanna och ladda batteriet, och att vi har räknat ut hur detta uppehåll ska räknas som kostnad i målfunktionen. Beskriv hur modellen och metoden kan modifieras så att denna möjlighet tas med i optimeringen.

b) Antag att snabbladdningen i uppgift a kan avbrytas vid valfri tidpunkt, och att ökningen av batteriets laddning då är proportionell mot laddningstiden. Hur skulle det påverka modell och metod?

Uppgift 7

Utgå från projekt 3, Sveriges elnät.

a) Antag att Sveriges elnät har 1000 länkar (istället för 141). Hur påverkas metodens effektivitet av detta? Vad tar mer tid?

b) Antag att man har 50 utbyggnadsalternativ att välja mellan (istället för 7). Hur påverkas metodens effektivitet av detta? Vad tar mer tid?

Uppgift 8

Utgå från projekt 4, snöröjning.

I det största exemplet i projektet gjordes vissa saker för hand i Vineopt, med syfte att förbättra lösningen. Försök skriva en algoritm (som ev. skulle gå att implementera) som gör detta.

Appendix

Lagrangedual: $v_L = \max g(u_1)$ då $u_1 \geq 0$ (PL)

Lagrangerelaxation:
$$\begin{array}{rlrcl} g(\bar{u}_1) = & \min & c^T x + \bar{u}_1^T (Ax - b) \\ & \text{då} & Bx & \leq & d \\ & & x & \geq & 0 \end{array} \qquad \text{(DS)}$$

$X = \{x : Bx \leq d,\ x \geq 0\}$ med extrempunkter $x^{(k)}\ \forall k \in P_X$.
Subgradient: $\xi = (A\bar{x} - b)$ där $\bar{x}$ är optimal i DS.
Om $0 \in \partial g(\bar{u})$ och $\bar{u} \geq 0$ så är $\bar{u}$ optimal.
Om $\exists \xi \in \partial g(\bar{u}) :\ \xi^T \bar{u} = 0,\ \xi \leq 0$ och $\bar{u} \geq 0$ så är $\bar{u}$ optimal.

Dantig-Wolfes masterproblem ($P'_X \subseteq P_X$):

$$\begin{array}{rll} v_{DM} = & \min & \displaystyle\sum_{k \in P'_X} c^T x^{(k)} \lambda_k \\ & \text{då} & \displaystyle\sum_{k \in P'_X} (A_1 x^{(k)} - b_1) \lambda_k \leq 0 \\ & & \displaystyle\sum_{k \in P'_X} \lambda_k = 1 \\ & & \lambda_k \geq 0 \ \ \forall k \in P'_X \end{array} \qquad \text{(DMP)}$$

eller
$$\begin{array}{rll} v_{DM} = & \max & q \\ & \text{då} & q \leq c^T x^{(k)} + u_1^T (A_1 x^{(k)} - b_1) \quad \forall k \in P'_X \\ & & u_1 \geq 0 \end{array} \qquad \text{(DM)}$$

Bendersdekomposition på problemet:

$v^* = \min c^T x + f(y) \quad$ då $Ax + G(y) \leq b,\ x \geq 0,\ y \in S$

Benders subproblem:

$$\begin{array}{rll} h(\bar{y}) = f(\bar{y}) + & \min & c^T x \\ & \text{då} & Ax \leq b - G(\bar{y}) \\ & & x \geq 0 \end{array} \qquad \text{(PSP)}$$

eller
$$\begin{array}{rll} h(\bar{y}) = f(\bar{y}) + & \max & (G(\bar{y}) - b)^T u \\ & \text{då} & -A^T u \leq c \\ & & u \geq 0 \end{array} \qquad \text{(PS)}$$

Benders masterproblem:

$$\begin{array}{rlll} v_{PM} = & \min & q & \\ & \text{då} & q \geq f(y) + (G(y) - b)^T u^{(k)} & \forall k \in P'_U \\ & & 0 \geq (G(y) - b)^T \tilde{u}^{(k)} & \forall k \in R'_U \\ & & y \in S & \end{array} \qquad \text{(PM)}$$