Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP61/TEN 1
OPTIMERING AV REALISTISKA SAMMANSATTA SYSTEM

Datum:	30 mars 2016
Tid:	14.00-19.00
Hjälpmedel:	Miniräknare
	Kurslitteraturen: Kaj Holmberg: *Optimering*
	Kaj Holmberg: Introduktion till matematiska dekompositionsmetoder
	Anteckningar i böckerna får förekomma.
Antal uppgifter:	8
Antal sidor:	5
	Uppgifterna är *inte* ordnade efter svårighetsgrad.
	Totalt antal poäng är 40. För godkänt krävs 16 poäng.
Examinator:	Kaj Holmberg
Jourhavande lärare:	Kaj Holmberg, tel 013-282867

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa dina beräkningar och din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden du gör.
Använd de standardmetoder som ingår i kursen.

Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla endast en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget vilka uppgifter du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.

Tentan består av två delar. Den första behandlar metoder i allmänhet, och innehåller teori och beräkningar. Den andra behandlar projekten. Till den delen finns inte alltid svar som är rätt eller fel, och i sådana fall belönas en tydlig diskussion som visar relevanta kunskaper.

Uppgift 1

Staten ska bygga höghastighetsjärnväg från Stockholm till Malmö. Det kommer att kosta mycket pengar, och man har en begränsad budget. Varje station kostar pengar, och ett alternativ är att låta järnvägen gå förbi en stad utan att några tåg stannar. Då behöver man inte bygga någon station. Å andra sidan försvinner de samhälleliga intäkterna av resenärer som skulle ha stigit av/på vid den stationen.

Tabellen nedan ger kostnaderna (i miljarder) för de olika alternativen, samt en uppskattad nytta, baserad på förväntat antal resande. I Linköping har man två olika alternativ för hur stationen ska byggas, och högst ett av dessa kan göras.

Stad	Utan station		Med station		Med station i tunnel	
	Kostnad	Nytta	Kostnad	Nytta	Kostnad	Nytta
Nyköping	0	0	3	1	-	-
Norrköping	1	0	5	2	-	-
Linköping	1	0	4	3	7	4
Jönköping	0	0	4	2	-	-

Man får inte använda mer än 10 miljarder till att bygga stationer, och man vill maximera den totala nyttan.

Det finns två komplikationer att observera:
1. Alternativet $x_j = 0$ ger för två städer *inte* kostnad/resursutnyttjande noll utan ett. Detta kan hanteras på flera olika sätt, varav jag rekommenderar en initial omformulering av problemet.
2. Modellering av de tre alternativen i Linköping görs exempelvis med en variabel som kan vara 0, 1 eller 2. Kostnaden och resursutnyttjandet blir då inte linjära. Observera möjligheten att använda tabeller för funktionsvärden.

a) Formulera optimeringsproblemet som ett optimeringsproblem av kappsäckstyp, med variabeldefinition, bivillkor och målfunktion. (Kalla variablerna x.) Här görs eventuell omformulering enligt punkt 1 ovan. (1p)

b) Ange alla nödvändiga definitioner för att lösa problemet med dynamisk programmering. Lös problemet. Ange svar. (3p)

c) Linköping erbjuder sig att betala en miljard själv till byggandet av den egna stationen. Hur förändras lösningen? (Lös inte om hela problemet från början, utan uppdatera lösningen med lämpliga operationer. Beskriv hur du gör.) (1p)

Uppgift 2

Betrakta kappsäcksproblemet i uppgift 1, men där tunnelalternativet är borttaget. Använd f.ö. formuleringen i uppgift 1a. Tips: Gör om till min-problem.

a) Applicera Lagrangerelaxation på problemet. Lös subproblemet för $u = 0$, $u = 0.4$ och $u = 0.6$. Beräkna subgradient, undre gräns och ev. övre gräns i varje punkt. Ange de bästa övre och undre gränserna som fås. Vet man huruvida optimum har uppnåtts? (Information från lösningen i uppgift 1 får inte användas.) (3p)

b) Avgör genom att studera Lagrangerelaxationen för vilka värden på u subproblemet ger den bästa av x-lösningarna som erhölls i uppgift a. (1p)

c) Försök genom att studera Lagrangerelaxationen och jämföra med resultatet i uppgift 1 att finna något värde på u som gör att optimallösningen är optimal i subproblemet, eller visa att något sådant u ej finns. Har vi styrbarhet? (2p)

Uppgift 3

Betrakta LP-relaxationen av kappsäcksproblemet i uppgift 2, dvs. där $0 \leq x \leq 1$.

a) Antag att problemet ska lösas med Dantzig-Wolfedekomposition (med samma relaxation som i uppgift 2). Formulera sub- och masterproblem för detta problem, med $x^{(l)}$ som funna subproblemlösningar. Beskriv kortfattat lösningsmetodiken, samt vilka övre och undre gränser som fås. (1p)

b) Beräkna Dantzig-Wolfesnitten som fås av punkterna som erhölls i uppgift 2, och sätt upp masterproblemet med aktuella siffror. (Använd subproblemlösningar m.m. från uppgift 2.) Lös masterproblemet grafiskt. Ange optimalt u samt de bästa övre och undre gränser man nu har. (3p)

c) Lös subproblemet för det u som uppgift 3b gav. Ange de bästa övre och undre gränser man nu har. Fås ett nytt snitt? (1p)

d) Sätt upp dualen av masterproblemet, och finn optimallösningen (λ). Ledning: Utnyttja komplementaritetsvillkoren. Beräkna den resulterande x-lösningen mha. λ. Är det optimum? (2p)

Uppgift 4

LHC ska spela final i Globen, och funderar på att chartra en eller flera bussar för transport av hejarklack och andra fans. Man tar fram en optimeringsmodell för att avgöra hur många bussar man ska ta. Resenärerna delas upp i två grupper, inbitna fans som ger stor effekt som hejarklackar och mer normala åskådare som också hejar, men inte bedöms kunna göra lika stor skillnad för slutresultatet. Låt x_1 stå för antal resenärer av den första typen och x_2 av den andra typen. (Variablerna är lite omskalade för att slippa lite nollor.) Man gör bedömningen att varje enhet av x_1 ger en ökning av vinstchansen motsvarande en intäkt av 5, och varje enhet av x_2 ger på samma sätt en intäkt av 3. Man anser sig kunna påverka fördelningen mellan de två grupperna genom att välja hur man säljer biljetterna.

Kostnaden för att chartra y bussar ges av funktionen $f(y)$, skalad för att vara direkt jämförbar med intäkterna. Optimeringsmodellen innehåller ett bivillkor för hur många som får plats i bussarna, $x_1 + x_2 \leq 3y$. Dessutom tror man att andelen av den första sortens åskådare är begränsad enligt bivillkoret $x_1 \leq x_2 + y$.

Optimeringsmodellen man vill lösa blir alltså följande, där man har skrivit om problemet för att underlätta formuleringen av LP-dualen.

$$
\begin{array}{llcccl}
v^* = \min & -5x_1 & - & 3x_2 & + & f(y) \\
\text{då} & -x_1 & - & x_2 & \geq & -3y \\
& -x_1 & + & x_2 & \geq & -y \\
& x_1, & & x_2 & \geq & 0 \\
& & & y & \in & \{0, 1, 2, 3\}
\end{array}
$$

a) Man vill använda Bendersdekomposition för att lösa problemet. Formulera sub- och masterproblem för detta problem, med $u^{(l)}$ som funna duallösningar till subproblemet. Behåll beteckningen $f(y)$ i formuleringarna. Beskriv kortfattat lösningsmetodiken, samt vilka övre och undre gränser som fås. (1p)

b) Använd $f(y) = 12y$. Lös subproblemet (dvs. lös LP-dualen grafiskt) för $y = 0$, $y = 1$ och $y = 2$, och beräkna Benderssnitten för de erhållna lösningarna. Lös sedan Benders masterproblem grafiskt. Lös subproblemet i punkten masterproblemet gav, om det inte redan är gjort. Notera de övre och undre gränser som fås, samt ange den bästa funna tillåtna lösningen (funnen mha. komplementaritet). (3p)

c) Studera det tillåtna området till LP-dualen av subproblemet för att avgöra hur många Benderssnitt det finns totalt till problemet. (1p)

d) Mer realistiskt är att $f(y)$ är styckvis linjär och konvex, eftersom det är svårare att få tag på många bussar. Exempelvis:

y	0	1	2	3
$f(y)$	0	5	15	35

Förklara hur denna komplikation dyker upp i metoden, och varför det fortfarande går att använda Bendersdekomposition. (1p)

Uppgift 5

Utgå från projekt 1, Returpack.

I verkligheten finns betydligt fler butiker än i testproblemen i projektet. Beskriv vad som kommer att hända om man försöker lösa problemet på samma sätt som i projektet för ökande antal butiker. Gissa på en gräns för hur många butiker metoden klarar av. Föreslå ett sätt att angripa problemet med många butiker med en dekompositionsmetod (dvs. Lagrangerelaxation, Dantzig-Wolfedekomposition eller Bendersdekomposition). Vad ska relaxeras/fixeras? Hur ska subproblemen lösas? (4p)

Uppgift 6

Utgå från projekt 2, laddhybrid.

Diskutera vilka slumpfaktorer som skulle kunna påverka lösningen. Vilka skulle kunna hanteras på ett bra sätt av den använda metoden, och vilka skulle ge svårare komplikationer? (Någorlunda detaljerade svar krävs.) (4p)

Uppgift 7

Utgå från projekt 3, Sveriges elnät.

Betrakta utbyggnad av höghastighetsjärnväg, som nämnts i uppgift 1. (Dock ej den förenklade frågeställningen i uppgift 1, utan det mer realistiska problemet, inkluderande anläggning av spår.) Diskutera om och hur modell och metod som använts i projekt 3 kan användas för detta problem. Nämn likheter och skillnader. Hur skulle det fungera när det gäller utbyggnad, reparation, renovering av vanlig järnväg? (4p)

Uppgift 8

Utgå från projekt 4, snöröjning.

Diskutera hur metoden i projekt 4 kan användas för andra ruttningsproblem, såsom hämtning av sopor, upptagning av sand på våren, leverans av varor till flera hushåll (t.ex. om Systembolaget skulle börja med hemkörning), mm. Diskutera likheter och skillnader. (4p)