Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP61/TEN 1
OPTIMERING AV REALISTISKA SAMMANSATTA SYSTEM

Datum:	23 augusti 2016
Tid:	8.00-13.00
Hjälpmedel:	Miniräknare
	Kurslitteraturen: Kaj Holmberg: *Optimering*
	Kaj Holmberg: Introduktion till matematiska dekompositionsmetoder
	Anteckningar i böckerna får förekomma.
Antal uppgifter:	8
Antal sidor:	5
	Uppgifterna är *inte* ordnade efter svårighetsgrad.
	Totalt antal poäng är 40. För godkänt krävs 16 poäng.
Examinator:	Kaj Holmberg
Jourhavande lärare:	Kaj Holmberg, tel 013-282867

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa dina beräkningar och din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden du gör.
Använd de standardmetoder som ingår i kursen.

Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla endast en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget vilka uppgifter du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.

Tentan består av två delar. Den första behandlar metoder i allmänhet, och innehåller teori och beräkningar. Den andra behandlar projekten. Till den delen finns inte alltid svar som är rätt eller fel, och i sådana fall belönas en tydlig diskussion som visar relevanta kunskaper.

Uppgift 1

Bertil ska gå på loppis och köpa begagnade saker. Han orkar inte bära mer än 25 kg. Efter en första rundvandring har han spanat in vissa intressanta saker, samt bedömt hur mycket de väger och hur stort värde han skulle sätta på att äga föremålet. Data ges i nedanstående tabell. Han orkar inte bära hem allt han skulle vilja ha, så han vill helt enkelt bestämma vad han ska köpa, så att hans totalt införskaffade värde maximeras.

Föremål	Vikt (kg)	Värde	Pris
En gammal elgitarr	10	20	50
En låda med böcker	20	15	40
En prydnadstomte för trädgården	10	10	40
Ett större porslinsfat	3	5	35
Summa	43	50	165

Bertil har 200 kr i fickan, och bryr sig därför inte om priset.

a) Formulera optimeringsproblemet som ett optimeringsproblem av kappsäckstyp, med variabeldefinition, bivillkor och målfunktion. (Kalla variablerna x.) (1p)

b) Ange alla nödvändiga definitioner för att lösa problemet med dynamisk programmering. (1p)

c) En tabell med 26 kolumner blir för mycket att räkna med, så skala om bivillkoret på följande sätt. Dividera alla vikterna med 5 (inkl. högerledet) och avrunda uppåt till närmaste heltal. Lös problemet. Kontrollera sedan att lösningen är tillåten i det riktiga bivillkoret. Ange svar. (4p)

Uppgift 2

Betrakta kappsäcksproblemet i uppgift 1a. Använd inte omskalningen i uppgift 1c. Tips: Gör om till min-problem.

a) Applicera Lagrangerelaxation på problemet. Lös subproblemet för $u = 0.7$ och $u = 1.0$. Beräkna subgradient, undre gräns och ev. övre gräns i varje punkt. Ange de bästa övre och undre gränserna som fås. Vet man huruvida optimum har uppnåtts? (Information från lösningen i uppgift 1 får inte användas.) (3p)

b) Försök genom att studera Lagrangerelaxationen och jämföra med resultatet i uppgift 1 att finna något värde på u som gör att optimallösningen är optimal i subproblemet, eller visa att något sådant u ej finns. Har vi styrbarhet? (2p)

Uppgift 3

Betrakta LP-relaxationen av kappsäcksproblemet i uppgift 2, dvs. där $0 \leq x \leq 1$.

a) Antag att problemet ska lösas med Dantzig-Wolfedekomposition (med samma relaxation som i uppgift 2). Formulera sub- och masterproblem för detta problem, med $x^{(l)}$ som funna subproblemlösningar. Beskriv kortfattat lösningsmetodiken, samt vilka övre och undre gränser som fås. (1p)

b) Beräkna Dantzig-Wolfesnitten som fås av punkterna som erhölls i uppgift 2, och sätt upp masterproblemet med aktuella siffror. (Använd subproblemlösningar m.m. från uppgift 2.) Lös masterproblemet grafiskt och lös subproblemet för det u erhölls. Beräkna det nya snittet och lös om masterproblemet med det. Ange de bästa övre och undre gränser man har i varje iteration. (4p)

c) Sätt upp dualen av masterproblemet, och finn optimallösningen (λ). Ledning: Utnyttja komplementaritetsvillkoren. Beräkna den resulterande x-lösningen mha. λ. Är det optimum? (3p)

Uppgift 4

Bertil ska flytta och hans bil räcker inte till. Han kan hyra en lastbil, en lite mindre skåpbil och/eller en ännu mindre släpkärra. Han ska flytta ganska långt, så varje körning tar en hel dag. Fordonens kapacitet räcker inte till, så han måste köra flera gånger. Det betyder att han måste hyra fordonen flera dagar, och vi antar att priset ökar linjärt med antal dagar.

Följande tabell ger data för de olika fordonen. Först ges lastkapacitet per körning (sort 100 kg), sedan hyrpriset per dag och sist kostnaden per enhet (100 kg). Lastbilen har som synes högst kapacitet och högst hyrpris men lägst rörlig kostnad per enhet, medan släpkärran har tvärtom.

Fordon	Kapacitet	Hyrpris	Rörlig kostnad
Lastbil	10	20	2
Skåpbil	6	10	3
Släpkärra	2	6	5

Bertil har 15 enheter (a 100 kg) som ska flyttas.

Optimeringsproblemet att minimera kostnaden för flytten kan formuleras som följer.

$$
\begin{array}{llllllllllllll}
v^* = \min & 2x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & + & 20y_1 & + & 10y_2 & + & 6y_3 & & & \\
\text{då} & x_1 & & & & & - & 10y_1 & & & & & \leq & 0 & (1) \\
& & & x_2 & & & & & - & 6y_2 & & & \leq & 0 & (2) \\
& & & & & x_3 & & & & & - & 2y_3 & \leq & 0 & (3) \\
& x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & & & & & \geq & 15 & (4) \\
& x_1, & & x_2, & & x_3 & & & & & & & \geq & 0 & \\
& & & & & & & y_1, & & y_2, & & y_3 & \geq & 0, \text{ heltal} &
\end{array}
$$

Här står x_j för hur mycket (i 100 kg) som flyttas med fordon j och y_j för hur många dagar fordon j hyrs. Bivillkoren 1 - 3 ser till att vi inte kan använda fordon vi inte hyr, och bivillkor 4 ser till att allt flyttas.

Kombinering av bivillkoren ger kravet $10y_1 + 6y_2 + 3y_3 \geq 15$ för att Bertil ska hyra tillräckligt med fordon för att flytta allt.

a) Man vill använda Bendersdekomposition för att lösa problemet. Formulera sub- och masterproblem för detta problem, med $u^{(l)}$ som funna duallösningar till subproblemet. Beskriv kortfattat lösningsmetodiken, samt vilka övre och undre gränser som fås. (1p)

b) Bertil ser tre enkla lösningar där man bara hyr ett fordon. Om man bara hyr lastbilen krävs 2 dagar. Om man bara hyr skåpbilen krävs 3 dagar. Om man bara hyr släpkärran krävs 8 dagar.

Bertil löser Benders subproblem för dessa tre lösningar, $y^A = (2, 0, 0)$, $y^B = (0, 3, 0)$, $y^C = (0, 0, 8)$, vilket ger följande lösningar (där z är målfunktionsvärdet och u duallösningen):
A: $x = (15, 0, 0)$, $z = 70$, $u = (0, 0, 0, 2)$.
B: $x = (0, 15, 0)$, $z = 75$, $u = (1, 0, 0, 3)$.
C: $x = (0, 0, 15)$, $z = 123$, $u = (3, 2, 0, 5)$.

Beräkna Benderssnitten för de erhållna lösningarna, och notera bästa övre gräns. Skriv upp masterproblemet, inklusive bivillkoret $10y_1 + 6y_2 + 3y_3 \geq 15$ (vilket är det enda tillåtenhetssnitt som behövs).

Bertil tror att $y = (1, 1, 0)$ är den optimala lösningen till masterproblemet. Kontrollera detta genom att sätta in lösningen i bivillkoren/snitten, och beräkna den övre gränsen detta ger.

Lös därefter subproblemet för denna y-lösning. (Tips: Finn först primal lösning och använd därefter komplementaritet för att få fram den duala lösningen.)

Notera de övre och undre gränser som fås, samt ange den bästa funna tillåtna lösningen. Är optimum funnet? (4p)

Uppgift 5

Utgå från projekt 1, Returpack.

a) Beskriv Returpacksmodellen. Vilka variabler och bivillkor innehåller den? Var något i modelleringen extra krångligt? (3p)

b) Vilka intressanta och relevanta utvidgningar av modellen skulle man kunna lägga till på ett enkelt sätt? (Utan att modellen blir olösbar.) (1p)

Uppgift 6

Utgå från projekt 2, laddhybrid.

a) Beskriv optimeringsproblemet som löses samt metoden som används, helst i allmänna matematiska termer. (3p)

b) Vilka intressanta och relevanta utvidgningar av problemet skulle metoden kunna klara av? (Utan större ändringar i koden och utan att metoden blir ineffektiv.) (1p)

Uppgift 7

Utgå från projekt 3, Sveriges elnät.

a) Beskriv optimeringsproblemet som löses samt metoden som används, helst i allmänna matematiska termer. (3p)

b) Vilka intressanta och relevanta utvidgningar av problemet skulle metoden kunna klara av? (Utan större ändringar i koden och utan att metoden blir ineffektiv.) (1p)

Uppgift 8

Utgå från projekt 4, snöröjning.

a) Beskriv optimeringsproblemet som löses samt metoden som används, helst i allmänna matematiska termer. (3p)

b) Vilka intressanta och relevanta utvidgningar av problemet skulle metoden kunna klara av? (Utan större ändringar i koden och utan att metoden blir ineffektiv.) (1p)