Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP61/TEN 1
OPTIMERING AV REALISTISKA SAMMANSATTA SYSTEM

Datum:	11 januari 2017
Tid:	8.00-13.00
Hjälpmedel:	Miniräknare
	Kurslitteraturen: Kaj Holmberg: *Optimering*
	Kaj Holmberg: Introduktion till matematiska dekompositionsmetoder
	Anteckningar i böckerna får förekomma.
Antal uppgifter:	8
Antal sidor:	5
	Uppgifterna är *inte* ordnade efter svårighetsgrad.
	Totalt antal poäng är 40. För godkänt krävs 16 poäng.
Examinator:	Kaj Holmberg
Jourhavande lärare:	Kaj Holmberg, tel 013-282867

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa dina beräkningar och din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden du gör.
Använd de standardmetoder som ingår i kursen.

Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla endast en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget vilka uppgifter du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.

Tentan består av två delar. Den första behandlar metoder i allmänhet, och innehåller teori och beräkningar. Den andra behandlar projekten. Till den delen finns inte alltid svar som är rätt eller fel, och i sådana fall belönas en tydlig diskussion som visar relevanta kunskaper.

Uppgift 1

Man ska skicka upp en rymdsond, Shorttrip 1, från Esrange (utanför Kiruna), mot Europa (en av Jupiters månar), för att avgöra om Björndjur kan överleva där. Vikten är en kritisk aspekt, och det finns mer instrument man skulle vilja ta med än vad Shorttrip kan bära. Den maximal vikten av instrumenten som kan tas med är 100 kg. Tabellen nedan ger de olika instrument som kan tas med (högst ett av varje), deras vikt samt deras uppskattade nytta. Man vill maximera den totala nyttan.

	Föremål	Vikt (kg)	Nytta
1	Jonspektrometer	50	16
2	Langmuirprob	30	5
3	Fluxgatemagnetometer	20	5
4	Sensor för radio- och plasmavågor	10	3
5	Ultraviolett spektrograf	20	4
6	Kamera	20	10
7	Mikrovågsradiometer	10	4
8	Avancerad stjärnkompass	30	6

a) Formulera optimeringsproblemet som ett optimeringsproblem av kappsäckstyp, med variabeldefinition, bivillkor och målfunktion. (1p)

b) Ange alla nödvändiga definitioner för att lösa problemet med dynamisk programmering. (1p)

c) Man bestämmer att kameran, mikrovågsradiometern och den avancerade stjärnkompassen måste tas med, vilket gör att optimeringen bara berör de återstående instrumenten. Tips: Räkna i hela enheter om 10 kg, dvs. dividera bivillkoret med 10. Lös problemet med dynamisk programmering. Ange svar. (3p)

d) Genom att plocka bort några detaljer från höljet, kan man få med 110 kg instrument. För övrigt gäller samma förutsättningar som i uppgift c. Hur förändras lösningen? (Använd så mycket som möjligt av resultaten i uppgift c.) (1p)

Uppgift 2

Betrakta kappsäcksproblemet i uppgift 1a, med förutsättningarna i uppgift 1c (dvs. fixeringar och skalning av bivillkoret). Tips: Gör om till min-problem. Börja med att ta bort instrument som inte alls får plats.

a) Applicera Lagrangerelaxation på problemet. Lös subproblemet för $u = 0$, $u = 2$ och $u = 3$. Om subproblemet inte har unik lösning, beakta samtliga möjligheter. Beräkna subgradient, undre gräns och ev. övre gräns i varje punkt. Ange de bästa övre och undre gränserna som fås. Vet man huruvida optimum har uppnåtts? (Information från lösningen i uppgift 1 får inte användas.) (3p)

b) Försök genom att studera Lagrangerelaxationen och jämföra med resultatet i uppgift 1 att finna något värde på u som gör att optimallösningen är optimal i subproblemet, eller visa att något sådant u ej finns. Har vi styrbarhet? (1p)

c) Beskriv kortfattat vad som skulle hända om man inte eliminerade variabeln för ett instrument som är för tungt i uppgift 2a. (1p)

Uppgift 3

Betrakta LP-relaxationen av kappsäcksproblemet i uppgift 2, dvs. där $0 \leq x \leq 1$.

a) Antag att problemet ska lösas med Dantzig-Wolfedekomposition (med samma relaxation som i uppgift 2). Formulera sub- och masterproblem för detta problem, med $x^{(l)}$ som funna subproblemlösningar. Beskriv kortfattat lösningsmetodiken, samt vilka övre och undre gränser som fås. (1p)

b) Beräkna Dantzig-Wolfesnitten som fås av punkterna som erhölls i uppgift 2, och sätt upp masterproblemet med aktuella siffror. (Använd *alla* subproblemlösningar från uppgift 2.) Lös masterproblemet grafiskt. Fortsätt att iterera mellan subproblem och masterproblem tills optimum uppnåtts. Ange de bästa övre och undre gränser man har i varje iteration. (3p)

c) Sätt upp dualen av masterproblemet, och finn optimallösningen (λ). Ledning: Utnyttja komplementaritetsvillkoren. Beräkna den resulterande primala lösningen mha. λ. (2p)

d) Använd resultatet i uppgift 3b (närmare bestämt optimalt värde på u) för att avgöra vilken effekt det skulle ha att ta bort kraven att kameran, mikrovågsradiometern och den avancerade stjärnkompassen måste tas med. Förändras optimallösningen? Skulle de tas med ändå? (1p)

Uppgift 4

Genom att göra vissa investeringar skulle man från Esrange även kunna skjuta upp satelliter. Det finns tre möjliga utbyggnadsalternativ, som kan modelleras av en heltalsvariabel $y \in \{0, 1, 2, 3\}$ (där $y = 0$ innebär ingen utbyggnad).

Det finns tre olika typer av satelliter som skulle kunna skjutas upp, och vi låter x_1, x_2 och x_3 ange hur många av varje sort i medel per år. Eftersom förberedelsetiden har en viss utsträckning i tiden, och inte behöver sammanfalla med hela år, kan dessa variabler anta även icke-heltaliga värden.

Följande modell maximerar diskonterade framtida intäkter och minimerar kostnaderna för utbyggnaderna, allt skrivet som ett minimeringsproblem.

$$
\begin{array}{rrcrcrcrcl}
v^* = \min & -2x_1 & - & 3x_2 & - & 4x_3 & + & 20y & & & \\
\text{då} & 2x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & - & 10y & \leq & 0 & (1) \\
 & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & \leq & 8 & (4) \\
 & x_1, & & x_2, & & x_3 & & & \geq & 0 & \\
 & & & & & & & y & \in & \{0,1,2,3\} &
\end{array}
$$

a) Man vill använda Bendersdekomposition för att lösa problemet. Formulera sub- och masterproblem för detta problem, med $u^{(l)}$ som funna duallösningar till subproblemet. Beskriv kortfattat lösningsmetodiken, samt vilka övre och undre gränser som fås. (1p)

b) Lös problemet till optimalitet med Bendersdekomposition. Börja med att lösa subproblemet för $y = 0$. Lös masterproblemen och LP-dualen av subproblemen grafiskt. Ange i varje iteration de bästa övre och undre gränser man har. Ange fullständig optimallösning. (4p)

c) Relaxera heltalskravet på y och upprepa uppgift b. Utnyttja så mycket som möjligt av resultaten i uppgift b. (1p)

Uppgift 5

Utgå från projekt 1, Returpack.

a) Vilken dimension i de numeriska exemplen är betydligt mindre än i verkligheten? Bedöm metodens effektivitet för så stora problem. Ge några förslag på andra lösningsmetoder som skulle kunna vara mer effektiva för så stora problem. (2p)

b) Nämn några intressanta och relevanta utvidgningar av modellen man skulle kunna lägga till på ett enkelt sätt, så att modellen fortfarande blir lösbar med GLPK? (2p)

Uppgift 6

Utgå från projekt 2, laddhybrid.

a) Antag att man bara kan ändra framdrivningsinställningen ett steg upp eller ner mellan på varandra följande vägavsnitt. (Dvs. att man t.ex. inte kan gå direkt från bara el till bara bensin.) Hur skulle detta påverkar modell och metod? Klarar dynamisk programmering av denna förändring? (2p)

b) Antag att man inkluderar möjligheten att stanna och ladda batteriet vid en laddningsstation. Hur skulle detta kunna realiseras i modellen och metoden? (2p)

Uppgift 7

Utgå från projekt 3, Sveriges elnät.

a) Antag att varje utbyggnad kan ske i tre olika storlekar. Hur kan det modelleras i problemet? Hur förändras metoden? Är Bendersdekomposition forfarande en bra metod för problemet? (2p)

b) Antag att man vill lägga ner några kraftledningar, dvs. minska kapaciteten i vissa bågar till noll. Beskriv hur detta problem kan modelleras och lösas med Bendersdekomposition. (2p)

Uppgift 8

Utgå från projekt 4, snöröjning.

a) Antag att fordonen startar från en angiven punkt i nätverket. Hur kan det modelleras, så att samma metodik kan användas? (1p)

b) Antag att det fortsätter att snöa. Då måste man börja om i samma område, så fort man är färdig. Kan man använda samma metodik? Blir det några skillnader man ska tänka på? (1p)

c) På motorvägar kör man ofta snöplogar i par, den ena snett bakom den andra, för att kunna röja båda filerna samtidigt. Hur skulle man kunna hantera något sådant med metodiken i projektet? (Strunta i att detta troligen inte alls passar i stadsmiljö.) (1p)

d) Diskutera hur väl metodiken som används i projektet skulle passa för att planera snöröjning på landsvägar, och vilka skillnader som uppträder. (1p)