Matematiska institutionen
Optimeringslära

# TENTAMEN

## TAOP61/TEN 1
## OPTIMERING AV REALISTISKA SAMMANSATTA SYSTEM

| | |
|---|---|
| **Datum:** | 19 april 2017 |
| **Tid:** | 14.00-19.00 |
| **Hjälpmedel:** | Miniräknare |
| | Kurslitteraturen: Kaj Holmberg: *Optimering* |
| | Kaj Holmberg: Introduktion till matematiska dekompositionsmetoder |
| | Anteckningar i böckerna får förekomma. |
| **Antal uppgifter:** | 8 |
| **Antal sidor:** | 5 |
| | Uppgifterna är *inte* ordnade efter svårighetsgrad. |
| | Totalt antal poäng är 40. För godkänt krävs 16 poäng. |
| **Examinator:** | Kaj Holmberg |
| **Jourhavande lärare:** | Kaj Holmberg, tel 013-282867 |

**Resultat meddelas per e-post**

### Tentamensinstruktioner

**När Du löser uppgifterna**

*Redovisa dina beräkningar och din lösningsmetodik noga.*
*Motivera alla påståenden du gör.*
*Använd de standardmetoder som ingår i kursen.*

*Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.*
*Behandla endast en huvuduppgift på varje blad.*

**Vid skrivningens slut**

*Sortera dina lösningsblad i uppgiftsordning.*
*Markera på omslaget vilka uppgifter du behandlat.*
*Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.*

Tentan består av två delar. Den första behandlar metoder i allmänhet, och innehåller teori och beräkningar. Den andra behandlar projekten. Till den delen finns inte alltid svar som är rätt eller fel, och i sådana fall belönas en tydlig diskussion som visar relevanta kunskaper.

## Uppgift 1

Företaget BlueCargo har fått tillstånd av Banverket att skicka *ett* tåg från Linköping till Örebro. Man har fått ett antal beställningar på frakter, men kommer inte att kunna genomföra dem alla. Frågan är vilka beställningar man ska acceptera, och vilka man tyvärr måste avböja. (En beställning genomförs i sin helhet, eller inte alls.) Nedanstående tabell ger data för beställningarna, närmare bestämt hur många godsvagnar beställningen omfattar, hur mycket den väger (i ton) och till sist den vinst BlueCargo skulle göra om den genomförs. BlueCargo vill helt enkelt maximera sin vinst. Loket man ska använda kan inte dra mer än 20 ton och fler än 5 vagnar.

| Beställning | Antal godsvagnar | Vikt (ton) | Vinst |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 3 | 3 |
| 2 | 3 | 10 | 7 |
| 3 | 2 | 7 | 5 |
| 4 | 2 | 6 | 4 |
| 5 | 4 | 12 | 9 |

**a**) Formulera optimeringsproblemet som ett linjärt heltalsproblem, med variabeldefinition, bivillkor och målfunktion. (1p)

**b**) Ange alla nödvändiga definitioner för att lösa problemet med dynamisk programmering om man beaktar maxgränsen på antal vagnar, men struntar i vikten. (1p)

**c**) Lös problemet i uppgift b med dynamisk programmering. Ange svar. (3p)

**d**) Är lösningen i uppgift c tillåten med avseende på vikten? Är lösningen optimal i problemet i uppgift 1a? (1p)

## Uppgift 2

Betrakta optimeringsproblemet i uppgift 1a. Tips: Gör om till min-problem.

**a**) Applicera Lagrangerelaxation på problemet där båda bivillkoren relaxeras, med multiplikatorerna $u_1$ för bivillkoret för antal vagnar och $u_2$ för viktvillkoret. Ange hur subproblemet löses, samt hur man får subgradienter till den duala funktionen. (2p)

**b**) Lös subproblemet för $(u_1, u_2) = (2, 0)$, $(u_1, u_2) = (3, 0)$ och $(u_1, u_2) = (1, 0.5)$. Om subproblemet inte har unik lösning, välj den du tror är bäst. Beräkna subgradient, undre gräns och ev. övre gräns i varje punkt. Ange de bästa övre och undre gränserna som fås. Vet man huruvida optimum har uppnåtts? (Information från lösningen i uppgift 1 får inte användas.) (3p)

**c**) Försök genom att studera Lagrangerelaxationen finna något värde på $u$ som gör att lösningen i uppgift 1c är optimal i subproblemet, eller visa att något sådant $u$ ej finns. Grafiskt studium kan hjälpa. (1p)

**d**) Antag att man vet att ett av de två bivillkoren dominerar det andra, dvs. att alla lösningar som uppfyller det ena också uppfyller det andra. Hur kan man utnyttja det när man löser problemet med Lagrangerelaxation? (1p)

## Uppgift 3

Betrakta LP-relaxationen av problemet i uppgift 2, dvs. där $0 \leq x \leq 1$.

**a**) Antag att problemet ska lösas med Dantzig-Wolfedekomposition (med samma relaxation som i uppgift 2). Formulera sub- och masterproblem för detta problem, med $x^{(l)}$ som funna subproblemlösningar. Beskriv kortfattat lösningsmetodiken, samt vilka övre och undre gränser som fås. (1p)

**b**) Beräkna Dantzig-Wolfesnitten som fås av punkterna $x^{(1)} = (0, 1, 1, 0, 0)$, $x^{(2)} = (1, 1, 1, 0, 0)$, $x^{(3)} = (1, 1, 1, 0, 1)$, och sätt upp masterproblemet med aktuella siffror. Antag att detta masterproblem har optimallösningen $u = (3, 0)$. Beräkna målfuktionsvärdet i denna punkt och ange vilken övre eller undre gräns det ger, samt ange vilka snitt som är aktiva.

Lös subproblemet i denna punkt (eller ta informationen från uppgift 2), konstruera snittet denna lösning ger, lägg till i masterproblemet och verifiera att $u = (3, 0)$ inte skulle ge samma målfuktionsvärde i masterproblemet, och därför troligen inte är optimalt. (3p)

**c**) Du får förändra $u$ med steget 0.5 i valfri riktning från $(3, 0)$. Välj den riktning som verkar bäst. Motivera. Ledning: Titta speciellt på det sista snittet man fick fram i uppgift 3b.

Lös subproblemet i den punkt du fick, och avgör om du valde rätt riktning. (2p)

## Uppgift 4

Vid ett annat tillfälle får BlueCargo möjlighet att skicka med vagnar med ett tåg som GreenCargo kör. Man kan koppla på högst tre vagnar. Varje vagn kostar 10.000 kr att skicka och kan ta 10 ton last. Låt $y \in \{0, 1, 2, 3\}$ ange hur många vagnar man skickar.

Man har tre beställningar som skulle kunna tas med, men denna gång består beställningarna av små paket, så att man kan ta med valfria delar av beställningarna.

Den första beställningen ger vinsten 3000 kr per ton, och omfattar maximalt 5 ton, den andra ger vinsten 7000 kr per ton, och omfattar maximalt 3 ton, och den tredje ger vinsten 5000 kr per ton, och omfattar maximalt 5 ton. Låt $x_j$ ange hur mycket man tar med av beställning $j$. (Vi kan alltså betrakta $x$ som kontinuerliga variabler.)

Följande modell minimerar kostnaderna minus vinsten för transporterna.

$$
\begin{array}{rrcrcrcrll}
v^* = \min & -3x_1 & - & 7x_2 & - & 5x_3 & + & 10y & & \\
\text{då} & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & 10y & \leq 0 & (1) \\
& x_1 & & & & & & & \leq 5 & (2) \\
& & & x_2 & & & & & \leq 3 & (3) \\
& & & & & x_3 & & & \leq 5 & (4) \\
& x_1, & & x_2, & & x_3 & & & \geq 0 & \\
& & & & & & & y & \in \{0,1,2,3\} &
\end{array}
$$

**a**) Man vill använda Bendersdekomposition för att lösa problemet. Formulera sub- och masterproblem för detta problem, med $u^{(l)}$ som funna duallösningar till subproblemet. Beskriv kortfattat lösningsmetodiken, samt vilka övre och undre gränser som fås. (1p)

**b**) Lös problemet till optimalitet med Bendersdekomposition. Börja med att lösa subproblemet för $y = 0$. Subproblemet är ett kontinuerligt kappsäcksproblem som kan lösas med en metod i boken. Utnyttja komplementaritet för att få fram duallösningarna. Masterproblemet kan lösas grafiskt, men enklast är nog att evaluera varje heltalspunkt i de snitt man har. Ange i varje iteration bästa övre och undre gränser. Ange fullständig optimallösning. (4p)

## Uppgift 5

Utgå från projekt 1, Returpack.

Hur skulle modellen behöva modifieras för att ta med två sorters förpackningar (flaskor och burkar). Hur förändras problemets dimensioner? Vilka storleksökningar påverkar problemets svårighetsgrad mest? Bedöm metodens effektivitet för detta problem. Ge några förslag på andra lösningsmetoder som skulle kunna vara mer effektiva för detta problem. (4p)

## Uppgift 6

Utgå från projekt 2, laddhybrid.

**a**) Beskriv hur problemställningen och metoden kan användas för en elcykel. Vilka likheter och skillnader uppstår jämfört med elbil? Beskriv fördelar och nackdelar. (3p)

**b**) Ge förslag på andra problem som skulle kunna lösas med metoden/programmet, och motivera varför. (2p)

### Uppgift 7

Utgå från projekt 3, Sveriges elnät.

**a**) Antag att vissa utbyggnader kan ske i kontinuerlig storlek, upp till den angivna maxgränsen. (Dvs. att utbyggnaden kan vara allt från noll till 50, till kostnaden av 6 per enhet.) Hur kan det modelleras i problemet? Hur förändras metoden? Är Bendersdekomposition fortfarande en bra metod för problemet? (2p)

**b**) Antag att en storm river ner flera kraftledningar, så att total kapacitet blir för liten, och man snabbt vill bygga upp temporär kapacitet för att klara behoven. I ett sådant fall kanske man inte har tid att använda Bendersdekomposition, utan behöver en snabbare heuristik. Beskriv en sådan metod, gärna en som bygger på samma idéer som Bendersdekomposition. (2p)

### Uppgift 8

Utgå från projekt 4, snöröjning.

Beskriv i algoritmform hur man ytterligare skulle kunna förbättra lösningarna. Tanken är att ersätta det mänskliga inslaget i metodiken med något som går att programmera och göra automatiskt. Både sådant ni gjorde för hand och annat är intressant. Bedöm också vilka utsikter det egentligen finns för att lyckas med detta. (Något som bara tar tid och inte ger mycket förbättring är ju inte bra, heller inte något som tar alltför lång tid.) (3p)