Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP61/TEN 1
OPTIMERING AV REALISTISKA SAMMANSATTA SYSTEM

Datum:	22 augusti 2017
Tid:	8.00-13.00
Hjälpmedel:	Miniräknare
	Kurslitteraturen: Kaj Holmberg: *Optimering*
	Kaj Holmberg: Introduktion till matematiska dekompositionsmetoder
	Anteckningar i böckerna får förekomma.
Antal uppgifter:	9
Antal sidor:	5
	Uppgifterna är *inte* ordnade efter svårighetsgrad.
	Totalt antal poäng är 40. För godkänt krävs 16 poäng.
Examinator:	Kaj Holmberg
Jourhavande lärare:	Kaj Holmberg, tel 013-282867

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa dina beräkningar och din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden du gör.
Använd de standardmetoder som ingår i kursen.

Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla endast en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget vilka uppgifter du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.

Tentan består av två delar. Den första behandlar metoder i allmänhet, och innehåller teori och beräkningar. Den andra behandlar projekten. Till den delen finns inte alltid svar som är rätt eller fel, och i sådana fall belönas en tydlig diskussion som visar relevanta kunskaper.

Uppgift 1

Börje Prylberg ska lasta sin skåpbil med saker som han ska sälja på en loppis i Björkeberg. Skåpbilen, en Fjat, sjunger på sista versen, och klarar inte av speciellt hög vikt, så Börje kan inte ta med allt. Frågan är vad han ska ta med. Han har vägt de bästa sakerna, och vet också vad han skulle tjäna på att sälja dem, se tabellen nedan. Börje är optimist, så han räknar med att sälja allt han tar med, och vill maximera sin vinst. Fjatten klarar inte av mer än 100 kg.

Sak	Vikt (kg)	Vinst
1	33	3
2	12	7
3	71	5
4	63	4
5	12	9

a) Formulera optimeringsproblemet som ett linjärt heltalsproblem, med variabeldefinition, bivillkor och målfunktion. (1p)

b) Ange alla nödvändiga definitioner för att lösa problemet med dynamisk programmering. (1p)

c) Avrunda alla vikter till hela tiotal kg, och förkorta bort en nolla i bivillkoret (dvs. dividera alla bivillkorskoefficienter inkl. högerledet med 10). Lös problemet med dynamisk programmering. Ange svar. (3p)

d) Är lösningen i uppgift c tillåten i problemet i uppgift a? Om inte, gör en smart avrundning neråt för att få en tillåten lösning, och beräkna övre och undre gränser för att avgöra hur långt ifrån optimum lösningen är. (1p)

e) Börje har gått upp 10 kg i vikt, och kan därför bara packa 90 kg i Fjatten. Gör om uppgift c och d med denna förutsättning. (Utnyttja gärna resultaten från uppgift c och d.) (2p)

Uppgift 2

Betrakta optimeringsproblemet i uppgift 1a. Tips: Gör om till min-problem.

a) Applicera Lagrangerelaxation på problemet, med multiplikatorerna u för viktbivillkoret. Ange hur subproblemet löses, samt hur man får subgradienter till den duala funktionen. (2p)

b) Lös subproblemet för $u = 0$, $u = 0.5$ och $u = 0.1$. Beräkna subgradient, undre gräns och ev. övre gräns i varje punkt. Ange de bästa övre och undre gränserna som fås. Vet man huruvida optimum har uppnåtts? (Information från lösningen i uppgift 1 får inte användas.) (3p)

c) Försök genom att studera Lagrangerelaxationen finna något värde på u som gör att den bästa tillåtna lösningen i uppgift 1 är optimal i subproblemet, eller visa att något sådant u ej finns. (1p)

Uppgift 3

Betrakta LP-relaxationen av problemet i uppgift 2, dvs. där $0 \leq x \leq 1$.

a) Antag att problemet ska lösas med Dantzig-Wolfedekomposition (med samma relaxation som i uppgift 2). Formulera sub- och masterproblem för detta problem, med $x^{(l)}$ som funna subproblemlösningar. Beskriv kortfattat lösningsmetodiken, samt vilka övre och undre gränser som fås. (1p)

b) Beräkna Dantzig-Wolfesnitten som fås av punkterna $x^{(1)} = (0, 1, 1, 0, 1)$, $x^{(2)} = (0, 1, 0, 1, 1)$, $x^{(3)} = (1, 1, 0, 0, 1)$, $x^{(4)} = (1, 1, 1, 0, 1)$, och sätt upp masterproblemet med aktuella siffror. En approximation av optimallösningen till masterproblemet är $u = 0.1$. Beräkna målfuktionsvärdet i denna punkt och ange vilken övre eller undre gräns det ger, samt ange vilka snitt som är aktiva.

Lös subproblemet i denna punkt (eller ta informationen från uppgift 2), konstruera snittet denna lösning ger, lägg till i masterproblemet och verifiera att $u = 0.1$ inte skulle ge samma målfuktionsvärde i masterproblemet. Ange övre och undre gräns. (3p)

c) Vill man öka eller minska u från värdet 0.1? Motivera. Ledning: Titta på de aktiva snitten i uppgift 3b. (1p)

d) Om $u = 0.1$ vore optimalt, vilket x-lösning vore då optimal i problemet? Utnyttja information från senaste masterproblemlösningen. (1p)

Uppgift 4

När Börje plockar upp sina varor på loppisen, upptäcker han att bordet inte blir fullt. De som står bredvid honom, Albert och Cecilia, verkar dock ha för mycket varor. Börje kommer då på att han skulle kunna hyra ut delar av sitt bord till dem. Han ser tre praktiska möjligheter: 1: Albert får hyra hela den fria delen, 2: Cecilia får hyra hela den fria delen, 3: Albert och Cecilia får dela lika på den fria ytan. Börje modellerar detta med tre binära variabler, $y_1 = 1$ om Albert hyr allt, $y_2 = 1$ om Cecilia hyr allt, $y_3 = 1$ om Albert och Cecilia delar på det.

För att krångla till beslutet, erbjuder Albert och Cecilia en andel av förtjänsten som betalning till Börje. Albert säljer smågodis och Cecilia strumpor och trosor (i glada färger). Om Albert skulle få hyra hela delen, räknar han med att betala 1000 kr till Börje, medan halva delen skulle inbringa hälften så mycket. Om

Cecilia skulle få hyra hela delen, räknar hon med att betala 1200 kr till Börje, medan halva delen skulle inbringa hälften så mycket. Börje tror att om han inte hyr ut plats alls, kan han arrangera om sina saker på ett lockande sätt, och tjäna 400 kr mer.

Loppisadministrationen kräver Börje på 500 kr om han skulle hyra ut till en person, och 700 kr om han skulle hyra ut till två, med ökad administration som motivering.

Låt x_1 ange andel av den fria ytan Börje hyr ut till Albert, x_2 andel Börje hyr ut till Cecilia, och x_3 andel Börje inte hyr ut. Följande modell minimerar kostnaderna minus vinsten. (Börje räknar i hela hundralappar.)

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrrrrll}
v^* = \min & -10x_1 & - & 12x_2 & - & 4x_3 & + & 5y_1 & + & 5y_2 & + & 7y_3 & & \\
\text{då} & x_1 & & & & & - & y_1 & & & - & 0.5y_3 & \leq 0 & (1) \\
& & & x_2 & & & & & - & y_2 & - & 0.5y_3 & \leq 0 & (2) \\
& x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & & & & & \leq 1 & (3) \\
& & & & & & & y_1 & + & y_2 & + & y_3 & \leq 1 & (4) \\
& x_1, & & x_2, & & x_3 & & & & & & & \geq 0 & \\
& & & & & & & y_1, & & y_2, & & y_3 & \in \{0,1\} &
\end{array}
$$

a) Börje vill använda Bendersdekomposition för att lösa problemet. Formulera sub- och masterproblem för detta problem, med $u^{(l)}$ som funna duallösningar till subproblemet. Beskriv kortfattat lösningsmetodiken, samt vilka övre och undre gränser som fås. (1p)

b) Lös problemet till optimalitet med Bendersdekomposition. Börja med att lösa subproblemet för $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_3 = 0$. För subproblemet är primalen ganska enkel att lösa. Utnyttja komplementaritet för att få fram duallösningen. (Ledning: Alla dualvariabler antar ändliga värden.) Konstruera sedan det första Benderssnittet och sätt upp masterproblemet, och lös det på enklaste sätt. Lös sedan subproblemet i den erhållna punkten. Fortsätt till optimum nåtts. Ange i varje iteration bästa övre och undre gränser. Ange fullständig optimallösning. (4p)

c) Hur många snitt har det fullständiga masterproblemet? (1p)

Uppgift 5

a) Förklara varför Dantzig-Wolfedekomposition alltid finner exakt optimum på ett ändligt antal iterationer. (1p)

b) Förklara varför Bendersdekomposition alltid finner exakt optimum på ett ändligt antal iterationer. (1p)

Uppgift 6

Utgå från projekt 1, Returpack.

Beskriv några andra tillämpningar där Returpacksmodellen (med små modifieringar) skulle kunna användas. Alternativt kan man beskriva egenskaper som problemet ska ha för att det ska gå, och andra egenskaper som skulle göra att det inte skulle gå. (3p)

Uppgift 7

Utgå från projekt 2, laddhybrid.

Beskriv några andra tillämpningar metoden/koden (med små modifieringar) skulle kunna användas för. Alternativt kan man beskriva egenskaper som problemet ska ha för att det ska gå bra, och andra egenskaper som skulle göra att det inte skulle gå bra. (3p)

Uppgift 8

Utgå från projekt 3, Sveriges elnät.

Beskriv några andra tillämpningar som metoden (med små modifieringar) skulle kunna användas på. Alternativt kan man beskriva egenskaper som problemet ska ha för att det ska gå bra, och andra egenskaper som skulle göra att det inte skulle gå bra. (3p)

Uppgift 9

Utgå från projekt 4, snöröjning.

Beskriv några andra tillämpningar metoden (med små modifieringar) skulle kunna användas för. Alternativt kan man beskriva egenskaper som problemet ska ha för att det ska gå bra, och andra egenskaper som skulle göra att det inte skulle gå bra. (3p)