Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP61/TEN 1
OPTIMERING AV REALISTISKA SAMMANSATTA SYSTEM

Datum:	13 januari 2018
Tid:	8.00-13.00
Hjälpmedel:	Miniräknare
	Kurslitteraturen: Kaj Holmberg: *Optimering*
	Kaj Holmberg: Introduktion till matematiska dekompositionsmetoder
	Anteckningar i böckerna får förekomma.
Antal uppgifter:	9
Antal sidor:	6
	Uppgifterna är *inte* ordnade efter svårighetsgrad.
	Totalt antal poäng är 40. För godkänt krävs 16 poäng.
Examinator:	Kaj Holmberg
Jourhavande lärare:	Kaj Holmberg, tel 013-282867

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa dina beräkningar och din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden du gör.
Använd de standardmetoder som ingår i kursen.

Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla endast en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget vilka uppgifter du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.

Tentan innehåller både metoduppgifter med teori och beräkningar, och diskussionsuppgifter runt projekten, där det inte alltid finns svar som är rätt eller fel, och i sådana fall belönas en tydlig diskussion som visar relevanta kunskaper.

Uppgift 1

Den vänlige grannen Sven Naabo ska spela tomte i familjen Meera. Pappa Meera har dagarna innan lämnat en stor mängd julklappar i Svens garage. När Sven börjar packa paketen i sin julklappssäck, upptäcker han att han inte orkar bära allt. Han måste helt enkelt välja vad han ska ta med. Resterande julklappar får överräckas senare. Sven försöker avgöra värdet av att ha med de olika klapparna i säcken. Exempelvis känns det viktigt att julklappar till de små barnen Meera kommer med i säcken, medan pappans borrmaskin (som han har köpt själv) kan vänta. Vissa julklappar är små och lätta, och kan tas med utan problem, så valet gäller de stora och tunga paketen.

Sven gör följande lista med vikt och värde, och vill maximera värdet utan att vikten överskrider 30 kg.

Paket	Vikt (kg)	Värde
1	5	3
2	12	7
3	7	5
4	6	4
5	8	9

a) Formulera optimeringsproblemet som ett linjärt heltalsproblem, med variabeldefinition, bivillkor och målfunktion. (1p)

b) Ange alla nödvändiga definitioner för att lösa problemet med dynamisk programmering. (1p)

c) Avrunda alla vikter till hela femtal kg, och dividera alla bivillkorskoefficienter inkl. högerledet med 5. Lös problemet med dynamisk programmering. Ange svar. (3p)

d) Är lösningen i uppgift c tillåten i problemet i uppgift a? Om inte, gör en smart avrundning neråt för att få en tillåten lösning, och beräkna övre och undre gränser för att avgöra hur långt ifrån optimum lösningen är. (1p)

e) Sven är lite trött efter julmaten och glöggen och orkar bara bära 25 kg. Gör om uppgift c och d med denna förutsättning. (Utnyttja resultaten från uppgift c och d.) (1p)

Uppgift 2

Betrakta optimeringsproblemet i uppgift 1a. Tips: Gör om till min-problem.

a) Applicera Lagrangerelaxation på problemet, med multiplikatorerna u för viktbivillkoret. Ange hur subproblemet löses, samt hur man får subgradienter till den duala funktionen. (1p)

b) Lös subproblemet för $u = 0.6$, $u = 0.7$ och $u = 1$. Beräkna subgradient, undre gräns och ev. övre gräns i varje punkt. Ange de bästa övre och undre gränserna som fås. Vet man huruvida optimum har uppnåtts? (Information från lösningen i uppgift 1 får inte användas.) (3p)

c) Försök genom att studera Lagrangerelaxationen finna något värde på u som gör att den bästa tillåtna lösningen i uppgift 1 är optimal i subproblemet, eller visa att något sådant u ej finns. (1p)

Uppgift 3

Betrakta LP-relaxationen av problemet i uppgift 2, dvs. där $0 \leq x \leq 1$.

a) Antag att problemet ska lösas med Dantzig-Wolfedekomposition (med samma relaxation som i uppgift 2). Formulera sub- och masterproblem för detta problem, med $x^{(l)}$ som funna subproblemlösningar. Beskriv kortfattat lösningsmetodiken, samt vilka övre och undre gränser som fås. (1p)

b) Beräkna Dantzig-Wolfesnitten som fås av punkterna $x^{(1)} = (0, 0, 1, 1, 1)$, $x^{(2)} = (1, 0, 1, 1, 1)$, $x^{(3)} = (1, 1, 1, 1, 1)$, och sätt upp masterproblemet med aktuella siffror. Visa/troliggör att optimallösningen till masterproblemet är $u = 7/12 \approx 0.5833$. Beräkna målfuktionsvärdet i denna punkt och ange vilken övre eller undre gräns det ger, samt ange vilka snitt som är aktiva.

Använd komplementaritet och beräkna den duala/primala lösningen (λ) till masterproblemet och beräkna den konvexkombination av subproblemlösningar som är optimal. Verifiera att detta är den optimala LP-lösningen. (4p)

Uppgift 4

Tomten funderar på att koppla på två extra renar framför sin släde. De är dyra i drift, men möjliggör att flera julklappar kan tas med, vilket tomten ser som en vinst. Han kommer fram till följande optimeringsmodell, där $y_j = 1$ om ren j ska tas med, och x_j anger hur mycket julklappar av sort j kan tas med. (x behöver inte vara heltal.)

$$
\begin{array}{llllllllll}
v^* = \min & -5x_1 & - & 3x_2 & - & 2x_3 & + & 10y_1 & + & 12y_2 & & & \\
\text{då} & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & 3y_1 & - & 2y_2 & \leq & 2 & (1) \\
 & x_1 & + & 2x_2 & & & & & & & \leq & 3 & (2) \\
 & x_1, & & x_2, & & x_3 & & & & & \geq & 0 & \\
 & & & & & & & y_1, & & y_2 & \in & \{0,1\} &
\end{array}
$$

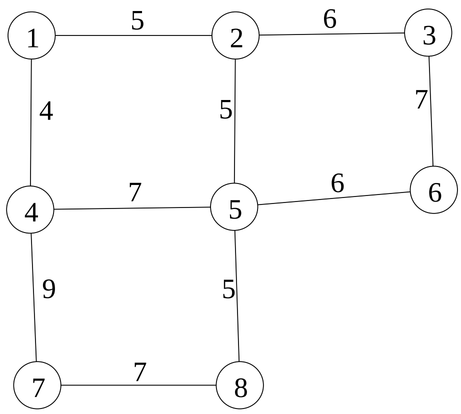
a) Antag att Bendersdekomposition ska användas för att lösa problemet. Formulera sub- och masterproblem för detta problem, med $u^{(l)}$ som funna duallösningar till subproblemet. Beskriv kortfattat lösningsmetodiken, samt vilka övre och undre gränser som fås. (1p)

b) Lös problemet till optimalitet med Bendersdekomposition. Börja med att lösa subproblemet för $y_1 = 0$, $y_2 = 0$. (Grafisk lösning av LP-dualen är ett bra sätt.) Konstruera sedan det första Benderssnittet och sätt upp masterproblemet, och lös det på enklaste sätt. Lös sedan subproblemet i den erhållna punkten. Fortsätt till optimum nåtts. Ange i varje iteration bästa övre och undre gränser. Ange fullständig optimallösning. (4p)

c) Hur många snitt har det fullständiga masterproblemet? (1p)

Uppgift 5

Följande graf föreställer gatunätverket i den lilla byn Storå, och uppgiften är att hämta soporna på varje gata i byn. På varje båge står tiden det tar att köra gatan och hämta innehållet i soptunnorna längs gatan.



Man funderar på om man ska skicka in 1, 2 eller 3 bilar för att göra soptömningen. Varje bil medför en fast kostnad på 10. Kostnaden för ett fordon beräknas helt enkelt som summan av bågkoefficienterna längs turen. Varje fordon ska köra en rundtur (med start i valfri nod). Tiden för hela soptömningen är maximum av tiderna för de bilar som används, och man använder lika vikter, dvs. målfunktionsvärdet för en lösning är summan av tiden och kostnaden. (Det går inte speciellt mycket fortare för en bil att köra en gata utan att tömma sopor, så man räknar med samma tid.)

Ledning: Ett lantbrevbärarproblem kan lösas optimalt på samma sätt som ett kinesiskt brevbärarproblem om bågarna som måste tas med bildar en sammanhängande graf. Det finns ingen anledning att beakta en osammanhängande bågtilldelning för ett fordon, ty det leder sannolikt till en sämre lösning. Alltså: förbind noder med udda valens på billigaste sätt för att se vilka bågar man ska lägga till (dvs. köra en extra gång).

a) Lös kinesiska brevbärarproblemet och beräkna kostnad, tid och målfunktionsvärde för en bil. (1p)

b) Gör en smart uppdelning av bågarna mellan två fordon, lös två lantbrevbärarproblem och beräkna total kostnad, tid och målfunktionsvärde för två bilar. (2p)

c) Gör en smart uppdelning av bågarna mellan tre fordon, lös tre lantbrevbärarproblem och beräkna total kostnad, tid och målfunktionsvärde för tre bilar. (2p)

d) Vilket antal bilar blir bäst? (1p)

Uppgift 6

Utgå från projekt 1, Returpack.

Beskriv huvuddragen i Returpacksmodellen (variabler, bivillkor). Vilka förenklingar skulle man kunna göra för att kunna lösa större problem? Vilka utvidgningar skulle man behöva göra för att lösa ännu mer verklighetstrogna problem? Hur mycket svårare skulle det göra modellen? (3p)

Uppgift 7

Utgå från projekt 2, laddhybrid.

Beskriv hur metoden/koden skulle kunna användas av en åkare som köpt en hybrid-lastbil för godstransporter. Man kan anta att bilen har en skaplig dator och att åkaren får nya uppdrag på kvällen dagen innan de ska utföras. Ett uppdrag specificerar var lasten ska hämtas och var den ska lämnas. (3p)

Uppgift 8

Utgå från projekt 3, Sveriges elnät.

Skriv en algoritm för ett program som löser problemet automatiskt (med Bendersdekomposition), dvs. utan att man behöver göra något för hand. Man har de program tilgängliga som användes i projektet, och behöver inte gå in på hur de fungerar. Det viktiga är hur information flyttas mellan enheterna. (2p)

Uppgift 9

Utgå från projekt 4, snöröjning.

Skriv en algoritm (dvs. beskriv vilka steg man ska genomgå) för hur man, med Vineopt och Snowplan, kan finna en bra lösning till ett problem som är större än Vadstena (t.ex. Linköping). Stegen ska vara väl specificerade, dvs. det räcker t.ex. inte med "flytta bågar mellan fordonen så att det blir bättre", utan det ska framgå hur man hittar de bågar som ska flyttas och vart man ska flytta dem. (3p)