Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP61/TEN 1
OPTIMERING AV REALISTISKA SAMMANSATTA SYSTEM

Datum:	4 april 2018
Tid:	14.00-19.00
Hjälpmedel:	Miniräknare
	Kurslitteraturen: Kaj Holmberg: *Optimering*
	Kaj Holmberg: Introduktion till matematiska dekompositionsmetoder
	Anteckningar i böckerna får förekomma.
Antal uppgifter:	9
Antal sidor:	6
	Uppgifterna är *inte* ordnade efter svårighetsgrad.
	Totalt antal poäng är 40. För godkänt krävs 16 poäng.
Examinator:	Kaj Holmberg
Jourhavande lärare:	Kaj Holmberg, tel 013-282867

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa dina beräkningar och din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden du gör.
Använd de standardmetoder som ingår i kursen.

Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla endast en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget vilka uppgifter du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.

Tentan innehåller både metoduppgifter med teori och beräkningar, och diskussionsuppgifter runt projekten, där det inte alltid finns svar som är rätt eller fel, och i sådana fall belönas en tydlig diskussion som visar relevanta kunskaper.

Uppgift 1

Bertil Biermann har köpt för mycket dryck i Bordershopen strax söder om gränsen, med tanke på att han åker med Folk&Fä-Flyg, som bara tillåter en resväska per person och den får inte väga mer än 20 kg. Han måste, hur mycket det än smärtar, lämna något kvar. Han gör gör följande lista med vikt och värde (baserat på prisjämförelse med butiken på hemorten), och vill maximera värdet.

Kolli	Vikt (kg)	Värde
1	2	3
2	4	5
3	5	7
4	10	12
5	12	5

a) Formulera optimeringsproblemet som ett linjärt heltalsproblem, med variabeldefinition, bivillkor och målfunktion. (1p)

b) Ange alla nödvändiga definitioner för att lösa problemet med dynamisk programmering. (1p)

c) Avrunda alla vikter till hela femtal kg, dvs. dividera alla bivillkorskoefficienter inkl. högerledet med 5 och avrunda. Lös problemet med dynamisk programmering. Ange svar. (3p)

d) Är lösningen i uppgift c tillåten i problemet i uppgift a? Om inte, gör en smart avrundning neråt för att få en tillåten lösning, och beräkna målfunktionsvärde före och efter ändringen. (1p)

e) Bertil glömde att han har 5 kg smutstvätt att ta med. Hur mycket måste den vara värd (i ovanstående värdeskala) för att det ska vara bättre att ta med den hem än att slänga den direkt? Finn svar på detta genom att göra om uppgift c och d. (Utnyttja resultaten från uppgift c och d.) (1p)

Uppgift 2

Betrakta optimeringsproblemet i uppgift 1a. Tips: Gör om till min-problem.

a) Applicera Lagrangerelaxation på problemet, med multiplikatorerna u för viktbivillkoret. Ange hur subproblemet löses, samt hur man får subgradienter till den duala funktionen. (1p)

b) Lös subproblemet för $u = 1.0$, $u = 1.2$ och $u = 1.4$. (Om subproblemet inte har unik lösning, välj den du tror är bäst.) Beräkna subgradient, undre gräns och ev. övre gräns i varje punkt. Ange de bästa övre och undre gränserna som fås. Vet man huruvida optimum har uppnåtts? (Information från lösningen i uppgift 1 får inte användas.) (3p)

c) Försök genom att studera Lagrangerelaxationen finna något värde på u som gör att den bästa tillåtna lösningen i uppgift 1 är optimal i subproblemet, eller visa att något sådant u ej finns. (1p)

Uppgift 3

Betrakta LP-relaxationen av problemet i uppgift 2, dvs. där $0 \leq x \leq 1$.

a) Antag att problemet ska lösas med Dantzig-Wolfedekomposition (med samma relaxation som i uppgift 2). Formulera sub- och masterproblem för detta problem, med $x^{(l)}$ som funna subproblemlösningar. Beskriv kortfattat lösningsmetodiken, samt vilka övre och undre gränser som fås. (1p)

b) Beräkna Dantzig-Wolfesnitten som fås av punkterna som erhölls i uppgift 2, och sätt upp masterproblemet med aktuella siffror. Rita upp snitten och lös masterproblemet grafiskt. Beräkna målfuktionsvärdet i denna punkt och ange de bästa övre och undre gränserna, samt ange vilka snitt som är aktiva.

Använd komplementaritet och beräkna den duala/primala lösningen (λ) till masterproblemet och beräkna motsvarande konvexkombination av subproblemlösningar. Jämför lösningen med den optimala LP-lösningen (som kan fås en girig metod i boken). (3p)

Uppgift 4

Bertil tänker ta bilen nästa resa och funderar på att köpa en takbox. Han har hittat två modeller på www.bilgrejor.com som kan vara intressanta. De kostar olika mycket, och tillåter olika mycket last, och det är mängden last Bertil värderar. Han har satt upp följande optimeringsmodell, där $y_i = 1$ om takbox i ska köpas, och x_j anger hur mycket bagage av typ j som kan tas med.

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcrcll}
v^* = \min & -5x_1 & - & 4x_2 & - & 3x_3 & + & 8y_1 & + & 12y_2 & & & \\
\text{då} & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & 5y_1 & - & 7y_2 & \leq & 8 & (1) \\
 & & & & & & & y_1 & + & y_2 & \leq & 1 & (2) \\
 & x_1, & & x_2, & & x_3 & & & & & \geq & 0 & \\
 & & & & & & & y_1, & & y_2 & \in & \{0,1\} &
\end{array}
$$

a) Antag att Bendersdekomposition ska användas för att lösa problemet. Formulera sub- och masterproblem för detta problem, med $u^{(l)}$ som funna duallösningar till subproblemet. Beskriv kortfattat lösningsmetodiken, samt vilka övre och undre gränser som fås. (1p)

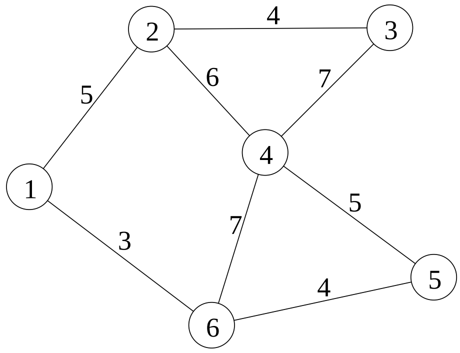
b) Lös problemet till optimalitet med Bendersdekomposition. Börja med att lösa subproblemet för $y_1 = 0$ och $y_2 = 0$ (ingen takbox). Konstruera sedan det första Benderssnittet och sätt upp masterproblemet, och lös det på enklaste sätt. Lös sedan subproblemet i den erhållna punkten. Fortsätt till optimum nåtts. Ange i varje iteration bästa övre och undre gränser. Ange fullständig optimallösning. (4p)

c) Hur många snitt har det fullständiga masterproblemet? (1p)

d) Är det något med x-delen av modellen som inte är så vettigt? (1p)

Uppgift 5

Följande graf föreställer gatunätverket i den lilla byn Pyttebo, och uppgiften är att sopa upp all sand som spridits ut under vintern. På varje båge står tiden det tar att köra gatan och sopa.



Man funderar på om man ska skicka in 1, 2 eller 3 bilar för att sopa. Varje bil medför en fast kostnad på 10. Kostnaden för ett fordon beräknas som summan av bågkoefficienterna längs turen. Varje fordon ska köra en rundtur (med start i valfri nod). Tiden för hela sopningen är maximum av tiderna för de bilar som används, och man använder lika vikter, dvs. målfunktionsvärdet för en lösning är summan av tiden och kostnaden.

Ledning: Ett lantbrevbärarproblem kan lösas optimalt på samma sätt som ett kinesiskt brevbärarproblem om bågarna som måste tas med bildar en sammanhängande graf. Det finns ingen anledning att beakta en osammanhängande bågtilldelning för ett fordon, ty det leder sannolikt till en sämre lösning. Alltså: förbind noder med udda valens på billigaste sätt för att se vilka bågar man ska lägga till (dvs. köra en extra gång).

a) Lös kinesiska brevbärarproblemet och beräkna kostnad, tid och målfunktionsvärde för en bil. (1p)

b) Gör en smart uppdelning av bågarna mellan två fordon, lös två lantbrevbärarproblem och beräkna total kostnad, tid och målfunktionsvärde för två bilar. (2p)

c) Gör en smart uppdelning av bågarna mellan tre fordon, lös tre lantbrevbärarproblem och beräkna total kostnad, tid och målfunktionsvärde för tre bilar. (2p)

d) Vilket antal bilar blir bäst? (1p)

Uppgift 6

Utgå från projekt 1, Returpack.

Beskriv huvuddragen i Returpacksmodellen (variabler, bivillkor). Vilka dimensioner är större i verkligheten? Vilka förenklingar skulle man kunna göra för att kunna lösa större problem? (3p)

Uppgift 7

Utgå från projekt 2, laddhybrid.

Antag att färdvägen inte är helt fixerad, utan att det finns ett fåtal möjliga alternativvägar mellan start- och slutpunkterna. Man vill då bestämma vägen samtidigt som man bestämmer framdrivningsalternativ. Beskriv hur detta skulle kunna göras med samma typ av metod, nämligen dynamisk programmering. Var noga med att definiera tillstånd och styrning mm. Diskutera hur effektiv metoden blir. (3p)

Uppgift 8

Utgå från projekt 3, Sveriges elnät.

Antag att varje möjlig utbyggnad består av flera delar, av vilka man kan göra en, flera eller alla. Hur påverkas optimeringsmodellen av detta? Hur påverkas lösningsmetoden? Man kan anta att det finns begränsningar av typen "del 3 kan bara göras om del 1 och/eller del 2 är gjorda". Hur kan dessa formuleras som bivillkor? Hur påverkas lösningsmetoden och dess effektivitet av detta? (3p)

Uppgift 9

Utgå från projekt 4, snöröjning.

Diskutera hur metoden i projekt 4 kan användas för andra ruttningsproblem, såsom hämtning av sopor, upptagning av sand på våren, leverans av varor till flera hushåll (t.ex. om Systembolaget skulle börja med hemkörning), mm. Diskutera likheter och skillnader. (2p)