Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP61/TEN 1
OPTIMERING AV REALISTISKA SAMMANSATTA SYSTEM

Datum:	28 augusti 2018
Tid:	8.00-13.00
Hjälpmedel:	Miniräknare
	Kurslitteraturen: Kaj Holmberg: *Optimering*
	Kaj Holmberg: Introduktion till matematiska dekompositionsmetoder
	Anteckningar i böckerna får förekomma.
Antal uppgifter:	9
Antal sidor:	6
	Uppgifterna är *inte* ordnade efter svårighetsgrad.
	Totalt antal poäng är 40. För godkänt krävs 16 poäng.
Examinator:	Kaj Holmberg
Jourhavande lärare:	Kaj Holmberg, tel 013-282867

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa dina beräkningar och din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden du gör.
Använd de standardmetoder som ingår i kursen.

Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla endast en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget vilka uppgifter du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.

Tentan innehåller både metoduppgifter med teori och beräkningar, och diskussionsuppgifter runt projekten, där det inte alltid finns svar som är rätt eller fel, och i sådana fall belönas en tydlig diskussion som visar relevanta kunskaper.

Uppgift 1

Mike Hiker ska fotvandra Östgötaleden förbi Ydre och bortåt. Han ska packa sin ryggsäck, och vill ha högst 35 kg i den. Han gör gör följande lista med vikt och värde på möjliga saker att ta med, och vill maximera värdet.

Kolli	Vikt (kg)	Värde
1	7	3
2	11	5
3	13	7
4	10	9
5	12	5
6	15	6

a) Formulera optimeringsproblemet som ett linjärt heltalsproblem, med variabeldefinition, bivillkor och målfunktion. (1p)

b) Ange alla nödvändiga definitioner för att lösa problemet med dynamisk programmering. (1p)

c) Avrunda alla vikter till hela femtal kg, dvs. dividera alla bivillkorskoefficienter inkl. högerledet med 5 och avrunda. Lös problemet med dynamisk programmering. Ange svar. (3p)

d) Är lösningen i uppgift c tillåten i problemet i uppgift a? Om inte, gör en smart avrundning neråt för att få en tillåten lösning, och beräkna målfunktionsvärde före och efter ändringen. (1p)

e) Mike känner lite svag, och vill bara bära 30 kg. Finn ny lösning genom att göra om uppgift c och d. (Utnyttja resultaten från uppgift c och d.) (1p)

Uppgift 2

Betrakta optimeringsproblemet i uppgift 1a. Tips: Gör om till min-problem.

a) Applicera Lagrangerelaxation på problemet, med multiplikatorerna u för vikt-bivillkoret. Ange hur subproblemet löses, samt hur man får subgradienter till den duala funktionen. (1p)

b) Lös subproblemet för $u = 0$, $u = 0.4$ och $u = 0.5$. (Om subproblemet inte har unik lösning, välj den du tror är bäst.) Beräkna subgradient, undre gräns och ev. övre gräns i varje punkt. Ange de bästa övre och undre gränserna som fås. Vet man huruvida optimum har uppnåtts? (Information från lösningen i uppgift 1 får inte användas.) (3p)

c) Försök genom att studera Lagrangerelaxationen finna något värde på u som gör att den bästa tillåtna lösningen i uppgift 1 är optimal i subproblemet, eller visa att något sådant u ej finns. (1p)

Uppgift 3

Betrakta LP-relaxationen av problemet i uppgift 2, dvs. där $0 \leq x \leq 1$.

a) Antag att problemet ska lösas med Dantzig-Wolfedekomposition (med samma relaxation som i uppgift 2). Formulera sub- och masterproblem för detta problem, med $x^{(l)}$ som funna subproblemlösningar. Beskriv kortfattat lösningsmetodiken, samt vilka övre och undre gränser som fås. (1p)

b) Beräkna Dantzig-Wolfesnitten som fås av subproblemlösningarna som erhölls i uppgift 2, och sätt upp masterproblemet med aktuella siffror. Rita upp snitten och lös masterproblemet grafiskt. Beräkna målfuktionsvärdet i denna punkt och ange de bästa övre och undre gränserna, samt ange vilka snitt som är aktiva.

Lös subproblemet med det u masterproblemet ger, om masterproblemet indikerar att det kan ge bättre lösning. Tillför ev. nytt snitt grafiskt, och uppdatera masterproblemets lösning samt övre och undre gränser.

Använd komplementaritet och beräkna den duala/primala lösningen (λ) till masterproblemet och beräkna motsvarande konvexkombination av subproblemlösningar. Jämför lösningen med den optimala LP-lösningen (som kan fås en girig metod i boken). (4p)

Uppgift 4

Nästa vandringstur Mike ska göra går upp på Mount Everest. Då bär man inte allt själv, utan hyr in en eller flera sherpas (bärare från Nepal). Låt y vara antalet sherpas Mike hyr in. Givetvis kan man ta med mer om man hyr in flera, men det kostar ju, så återigen handlar det om vilket värde man får för pengarna. Låt x_j ange hur mycket bagage av typ j som kan tas med. Följande optimeringsmodell minimerar kostnaderna minus värdet. (Högerleden är vad Mike själv kan bära.)

$$
\begin{array}{rrcrcrcrcll}
v^* = \min & -2x_1 & - & 3x_2 & - & 10x_3 & + & 100y & & & \\
\text{då} & x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & - & 30y & \leq & 20 & (1) \\
 & & & x_2 & + & x_3 & - & 14y & \leq & 1 & (2) \\
 & x_1, & & x_2, & & x_3 & & & \geq & 0 & \\
 & & & & & & & y & \in & \{0,1,2,3,4,5\} &
\end{array}
$$

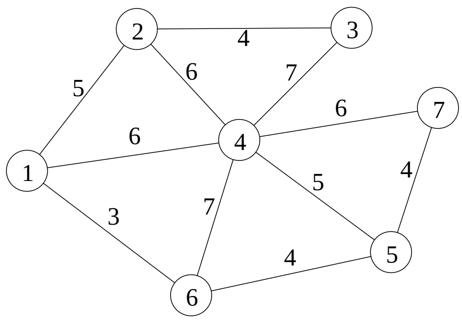
a) Antag att Bendersdekomposition ska användas för att lösa problemet. Formulera sub- och masterproblem för detta problem, med $u^{(l)}$ som funna duallösningar till subproblemet. Beskriv kortfattat lösningsmetodiken, samt vilka övre och undre gränser som fås. (1p)

b) Lös problemet till optimalitet med Bendersdekomposition. Börja med att lösa subproblemet för $y = 0$ (inga sherpas). Konstruera sedan det första Benderssnittet och sätt upp masterproblemet, och lös det på enklaste sätt. Lös sedan subproblemet i den erhållna punkten. Fortsätt iterera tills optimum nåtts. Ange i varje iteration bästa övre och undre gränser. Ange fullständig optimallösning. (4p)

c) Hur många snitt har det fullständiga masterproblemet? (1p)

Uppgift 5

Följande graf föreställer gatunätverket i den lilla byn Bredejbo, där bredbandsfibern slutat fungera. Den har troligtvis gått av någonstans och man måste nu leta reda på felet. Fibern är dragen längs med gatorna, och man ska köra en bil med markradar långsamt längs gatorna för att lokalisera avbrottet. Det kan vara mer än ett avbrott, så alla gator måste genomsökas. Man kan hyra in flera bilar med markradar från grannbyn. På varje båge i grafen står tiden det tar att genomsöka gatan.



Man funderar på om man ska skicka in 1, 2 eller 3 bilar för att söka. Varje bil medför en fast kostnad på 10. Kostnaden för ett fordon beräknas som summan av bågkoefficienterna längs turen. Varje fordon ska köra en rundtur (med start i valfri nod). Tiden för hela sökningen är maximum av tiderna för de bilar som används, och man använder lika vikter, dvs. målfunktionsvärdet för en lösning är summan av tiden och kostnaden.

Ledning: Ett lantbrevbärarproblem kan lösas optimalt på samma sätt som ett kinesiskt brevbärarproblem om bågarna som måste tas med bildar en sammanhängande graf. Det finns ingen anledning att beakta en osammanhängande bågtilldelning för ett fordon, ty det leder sannolikt till en sämre lösning. Alltså: förbind noder med udda valens på billigaste sätt för att se vilka bågar man ska lägga till (dvs. köra en extra gång).

a) Lös kinesiska brevbärarproblemet och beräkna kostnad, tid och målfunktionsvärde för en bil. (1p)

b) Gör en smart uppdelning av bågarna mellan två fordon, lös två lantbrevbärarproblem och beräkna total kostnad, tid och målfunktionsvärde för två bilar. (2p)

c) Gör en smart uppdelning av bågarna mellan tre fordon, lös tre lantbrevbärarproblem och beräkna total kostnad, tid och målfunktionsvärde för tre bilar. (2p)

d) Vilket antal bilar blir bäst? (1p)

e) Utgående från turerna i föregående deluppgifter, hur stor skulle den fasta kostnaden behöva vara för att två bilar ska ge den bästa lösningen? (1p)

Uppgift 6

Utgå från projekt 1, Returpack.

Beskriv i detalj hur Lagrangerelaxation skulle kunna användas för att lösa större instanser av Returpacksmodellen. (3p)

Uppgift 7

Utgå från projekt 2, laddhybrid.

Ange komplikationer som kan förekomma i praktiska fall som metoden inte klarar av, och varför. (2p)

Uppgift 8

Utgå från projekt 3, Sveriges elnät.

Beskriv metoden på ett lättfattligt sätt för en icke-matematiker, med motivering, dvs. varför man ska tro att metoden fungerar. Använd begrepp såsom "priser" och "resurser". (3p)

Uppgift 9

Utgå från projekt 4, snöröjning.

Antag att man vill använda metoden i projekt 4 för andra ruttningsproblem, antingen snöröjning med komplikationer eller inom helt andra tillämpningsområden. Diskutera avgränsningar för metoden, dvs. vilka komplikationer som inte kan hanteras (och varför). (2p)