Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP61/TEN 1
OPTIMERING AV REALISTISKA SAMMANSATTA SYSTEM

Datum:	18 januari 2019
Tid:	8.00-13.00
Hjälpmedel:	Miniräknare
	Kurslitteraturen: Kaj Holmberg: *Optimering*
	Kaj Holmberg: Introduktion till matematiska dekompositionsmetoder
	Anteckningar i böckerna får förekomma.
Antal uppgifter:	8
Antal sidor:	7
	Uppgifterna är *inte* ordnade efter svårighetsgrad.
	Totalt antal poäng är 40. För godkänt krävs 16 poäng.
Examinator:	Kaj Holmberg
Jourhavande lärare:	Kaj Holmberg, tel 013-282867

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa dina beräkningar och din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden du gör.
Använd de standardmetoder som ingår i kursen.

Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla endast en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget vilka uppgifter du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.

Uppgift 1

Firma Kak&Bak gör kakor, och ska sälja dem på en marknad i Ydre. Man ska packa sin bil full och köra dit, men bilen har begränsad kapacitet, så man kan nog inte ta med allt man skulle vilja. Man tror att det är vikten som blir problemet, så det handlar om att välja saker att ta med, så att totalvikten inte överstiges. Följande lista anger möjliga saker att ta med, samt hur mycket man värdesätter att få med den saken.

Sak	Vikt (kg)	Värde
Bord 1	12	8
Bord 2	12	5
Partytält	20	7
Svart tavla för prislista	3	9
Flagga med reklam	5	4
“Pull up banner”	8	5
Kakor	40	15

Bilen tar högst 70 kg. Man vill maximera värdet på medtagna saker.

a) Formulera optimeringsproblemet som ett linjärt heltalsproblem, med variabeldefinition, bivillkor och målfunktion. (1p)

b) Ange alla nödvändiga definitioner för att lösa problemet med dynamisk programmering. (1p)

c) Avrunda alla vikter till hela tiotal kg, dvs. dividera alla bivillkorskoefficienter inkl. högerledet med 10 och avrunda. Lös problemet med dynamisk programmering. Ange svar. (3p)

d) Är lösningen i uppgift c tillåten i problemet i uppgift a? Om inte, gör en smart avrundning neråt för att få en tillåten lösning, och beräkna målfunktionsvärde före och efter ändringen. (1p)

e) Det är kallt, och man behöver ta med 10 kg kläder, så det blir bara 60 kg kvar till annat. Finn ny lösning genom att göra om uppgift c och d. (Utnyttja resultaten från uppgift c och d.) (1p)

Uppgift 2

Betrakta optimeringsproblemet i uppgift 1a. Tips: Gör om till min-problem.

a) Applicera Lagrangerelaxation på problemet, med multiplikator u för vikt-bivillkoret. Ange hur subproblemet löses, samt hur man får subgradienter till den duala funktionen. (1p)

b) Lös subproblemet för $u = 0$, $u = 0.3$ och $u = 0.4$. Beräkna subgradient, undre gräns och ev. övre gräns i varje punkt. Ange de bästa övre och undre gränserna som fås. Vet man huruvida optimum har uppnåtts? (Information från lösningen i uppgift 1 får inte användas.) (3p)

c) Försök genom att studera Lagrangerelaxationen finna något värde på u som gör att den bästa tillåtna lösningen i uppgift 1d är optimal i subproblemet, eller visa att något sådant u ej finns. (1p)

Uppgift 3

Betrakta LP-relaxationen av problemet i uppgift 2, dvs. där $0 \le x \le 1$.

a) Antag att problemet ska lösas med Dantzig-Wolfedekomposition (med samma relaxation som i uppgift 2). Formulera sub- och masterproblem för detta problem, med $x^{(l)}$ som funna subproblemlösningar. Beskriv kortfattat lösningsmetodiken, samt vilka övre och undre gränser som fås. (1p)

b) Beräkna Dantzig-Wolfesnitten som fås av subproblemlösningarna som erhölls i uppgift 2, och sätt upp masterproblemet med aktuella siffror. Rita upp snitten och lös masterproblemet grafiskt. Beräkna målfuktionsvärdet i denna punkt och ange de bästa övre och undre gränserna, samt ange vilka snitt som är aktiva.

Lös subproblemet med det u masterproblemet ger, om masterproblemet indikerar att det kan ge bättre lösning. Tillför ev. nytt snitt grafiskt, och uppdatera masterproblemets lösning samt övre och undre gränser.

Använd komplementaritet och beräkna den duala/primala lösningen (λ) till masterproblemet och beräkna motsvarande konvexkombination av subproblemlösningar. Jämför lösningen med den optimala LP-lösningen (som kan fås med en girig metod i boken). (4p)

Uppgift 4

Firma Kak&Bak är bara en person, och hon funderar på att ta med sig mer personal, nämligen mamma och/eller pappa. Flera personer kan hjälpa till att öka försäljningen, men för också med sig nackdelar, dels för mamma och pappa, som kanske tänkt göra något annat då, dels för att det kan bli stridigheter (alla vill bestämma). Låt x_j ange hur mycket man förväntar sig sälja av kaksort j, samt $y_1 = 1$ om mamma följer med och $y_2 = 1$ om pappa följer med. Det är lätt att uppskatta vinsten av att sälja kakor, men kostnaderna (som ska modellera nackdelarna) är svårare. Man väljer dock de siffror som anges i nedanstående optimeringsmodell, där kostnaderna minus vinsten minimeras.

$$
\begin{array}{rrcrcrcrcrcll}
v^* = \min & -4x_1 & - & 3x_2 & - & 5x_3 & + & 15y_1 & + & 20y_2 & & & \\
\text{då} & x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & - & 10y_1 & - & 8y_2 & \leq & 20 & (1) \\
 & & & x_2 & + & x_3 & - & 7y_1 & - & 8y_2 & \leq & 10 & (2) \\
 & x_1, & & x_2, & & x_3 & & & & & \geq & 0 & \\
 & & & & & & & y_1, & & y_2 & \in & \{0,1\} &
\end{array}
$$

a) Antag att Bendersdekomposition ska användas för att lösa problemet. Formulera sub- och masterproblem för detta problem, med $u^{(l)}$ som funna duallösningar till subproblemet. Beskriv kortfattat lösningsmetodiken, samt vilka övre och undre gränser som fås. (1p)

b) Lös problemet till optimalitet med Bendersdekomposition. Börja med att lösa subproblemet för $y_1 = 0$ och $y_2 = 0$ (inga föräldrar). Konstruera sedan det första Benderssnittet och sätt upp masterproblemet, och lös det på enklaste sätt. Lös sedan subproblemet i den erhållna punkten. Fortsätt iterera tills optimum nåtts. Ange i varje iteration bästa övre och undre gränser. Ange fullständig optimallösning. (Om man inte kommer på ett bättre sätt, kan masterproblemet lösas med fullständig uppräkning av de tillåtna lösningarna, även om detta givetvis inte får göras för verkliga problem.) (4p)

Uppgift 5

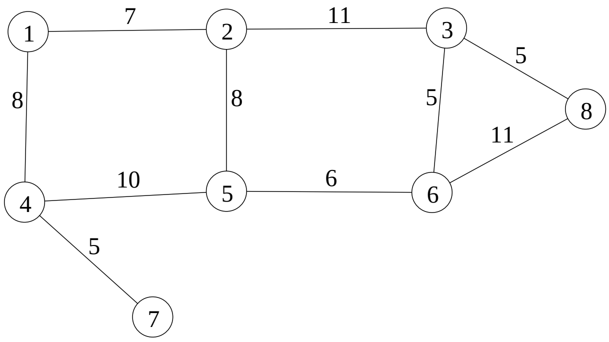
a) Förklara varför Dantzig-Wolfedekomposition alltid finner exakt optimum på ett ändligt antal iterationer. (1p)

b) Förklara varför Bendersdekomposition alltid finner exakt optimum på ett ändligt antal iterationer. (1p)

c) Förklara varför Lagrangerelaxation med subgradientoptimering kanske aldrig ger den optimala lösningen. (1p)

Uppgift 6

Följande graf föreställer gatunätverket i Ydre där marknaden ska äga rum. De ansvariga ska gå en runda och kontrollera att inga otillåtna saker har satts upp. (Man har krav på färg och stil.) Detta kan göras av en, två eller tre personer. Varje gata ska kontrolleras av någon av dessa personer, och varje person ska gå en runda som börjar och slutar i nod 1. Varje person som deltar får en ersättning på 100 kr för arbetet (oavsett hur mycket man jobbar). På varje båge i grafen står tiden det tar att kontrollera gatan. Man vill dels att kontrollen ska vara färdig så tidigt som möjligt, men vill också begränsa längden varje person måste gå genom att sätta upp en kostnad som är lika med den totala längden en person går.



Tiden för hela kontrollen är maximum av tiderna för de personer som deltar, och man använder lika vikter, dvs. målfunktionsvärdet för en lösning är summan av tiden och kostnaden. Vi antar här att det tar lika lång tid att gå en gata utan att kontrollera som när man kontrollerar.

Ledning: Ett lantbrevbärarproblem kan lösas på ungefär samma sätt som ett kinesiskt brevbärarproblem: förbind noder med udda valens på billigaste sätt för att se vilka bågar man ska lägga till (dvs. köra en extra gång).

I uppgift a - d antar vi att personerna kan starta i valfria noder.

a) Lös kinesiska brevbärarproblemet och beräkna kostnad, tid och målfunktionsvärde för en person. (1p)

b) Gör en smart uppdelning av bågarna mellan två personer, lös två lantbrevbärarproblem och beräkna total kostnad, tid och målfunktionsvärde för två personer. (2p)

c) Gör en smart uppdelning av bågarna mellan tre personer, lös tre lantbrevbärarproblem och beräkna total kostnad, tid och målfunktionsvärde för tre personer. (2p)

d) Vilket antal personer blir bäst? (1p)

e) Hur kan man göra en liten modifiering av grafen/problemet, så att alla personer börjar och slutar sin runda i nod 1? (Samma lösningsmetod ska sedan kunna användas. Lös dock inte om problemet.) (1p)

Uppgift 7

Som beskrives i projekt 5, skulle man kunna göra mandatfördelningen efter ett val genom att lösa följande optmeringsmodell, där x_j anger antal mandat parti j ska få, medan r_j anger hur många röster parti j fick. Antalet partier är n, antal röster p (dvs. $p = \sum_j r_j$) och totalt antal mandat m. Målfunktionen säger att man ska komma så nära perfekt proportionalitet som möjligt, och använder $d = m/p$, vilket anger antal mandat per röst. (Kvadratroten av hälften av målfunktionsvärdet ger det så kallade Gallagher-indexet för hur proportionell fördelningen är.)

$$
\begin{array}{lll}
\min & f(x) = & \sum_{j=1}^{n} (x_j - dr_j)^2 \\
\text{då} & & \sum_{j=1}^{n} x_j = m \\
& & x_j \geq 0, \text{ heltal, för alla } j
\end{array}
$$

I denna uppgift struntar vi i ev. spärr för att småpartier inte ska komma in i riksdagen. Vi använder data från valet 2018, med småpartier borttagna. $m = 349$.

Parti	Antal röster, r_j	dr_j
Moderaterna	1284698	70.302
Centerpartiet	557500	30.508
Liberalerna	355546	19.456
Kristdemokraterna	409478	22.407
Socialdemokraterna	1830386	100.164
Vänsterpartiet	518454	28.371
Miljöpartiet	285899	15.645
Sverigedemokraterna	1135627	62.145

a) Formulera Lagrangerelaxationen där det första bivillkoret relaxeras. Notera att subproblemet separeras i ett problem per variabel. Lös subproblemet för $u = 0$. Eftersom målfunktionen är symmetrisk, fås heltalsoptimum till ett en-dimensionellt problem i den heltalspunkt som ligger närmast den kontinuerliga lösningen. Ange sedan, med hjälp av en subgradient, om u bör ökas eller minskas. (Observera att det är ett likhetsbivillkor.) (3p)

b) Beskriv hur subproblemet effektivt kan lösas för $u \neq 0$. (1p)

Uppgift 8

Betrakta grafen i uppgift 6. Man vill förbinda alla noder på billigaste sätt, vilket blir ett billigaste uppspännande träd, MST. Dock vill man av strategiska skäl att nod 5 får valensen 3. Uppgiften är alltså att finna billigaste uppspännande träd under extrabivillkoret att nod 5 får valens 3. Formulera Lagrangrerelaxationen att detta problem, så att man får ett normal MST som subproblem. (Man behöver inte formulera kravet att lösningen bildar ett träd krångligare än $x \in T$.)

Lös problemet för $u = 0$ och ange, mha. en subgradient, om u bör ökas eller minskas. Ange hur bågkostnaderna ändras då u ökas. Avgör, genom att studera subproblemet, hur mycket u måste ändras för att önskad lösning ska bli optimal i subproblemet. (Det går faktiskt genom att studera en viss cykel i grafen.) Gör ändringen och lös om subproblemet.

Ange en tillåten lösning till problemet samt de bästa övre och undre gränserna som fås. (4p)