Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP61/TEN 1
OPTIMERING AV REALISTISKA SAMMANSATTA SYSTEM

Datum:	24 april 2019
Tid:	14.00-19.00
Hjälpmedel:	Miniräknare
	Kurslitteraturen: Kaj Holmberg: *Optimering*
	Kaj Holmberg: Introduktion till matematiska dekompositionsmetoder
	Anteckningar i böckerna får förekomma.
Antal uppgifter:	8
Antal sidor:	6
	Uppgifterna är *inte* ordnade efter svårighetsgrad.
	Totalt antal poäng är 40. För godkänt krävs 16 poäng.
Examinator:	Kaj Holmberg
Jourhavande lärare:	Kaj Holmberg, tel 013-282867

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa dina beräkningar och din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden du gör.
Använd de standardmetoder som ingår i kursen.

Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla endast en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget vilka uppgifter du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.

Uppgift 1

Linolf ska åka på semester med ett mycket billigt flyg, och funderar vad han ska ta med sig. Flygbolaget tar extrabetalt för incheckat bagage, och Linolf är för snål för det, så han kommer bara att ta med sig handbagage, och det får inte väga mer än 8 kg. Följande lista anger möjliga saker att ta med, samt hur mycket han värdesätter att få med dem. Han vill maximera värdet på väskans innehåll.

Sak	Vikt (kg)	Värde
Badkläder	3	10
Vandringskläder	4	8
Extra skor	2	7
Böcker	1	4
Dator	2	6
Finkläder	4	5

a) Formulera optimeringsproblemet som ett linjärt heltalsproblem, med variabeldefinition, bivillkor och målfunktion. (1p)

b) Ange alla nödvändiga definitioner för att lösa problemet med dynamisk programmering. (1p)

c) Lös problemet med dynamisk programmering. Ange svar. (3p)

d) Linolf kommer på att väskan väger 1 kg, så det blir bara 7 kg kvar till innehållet. Finn ny optimal lösning (utnyttja resultaten från uppgift c.) (1p)

Uppgift 2

Betrakta optimeringsproblemet i uppgift 1d (med $b = 7$). Tips: Gör om till min-problem.

a) Applicera Lagrangerelaxation på problemet, med multiplikator u för viktbivillkoret. Ange hur subproblemet löses, samt hur man får subgradienter till den duala funktionen. (1p)

b) Lös subproblemet för $u = 0$ och sedan för ökande u, en enhet i taget, tills en tillåten lösning fås. Beräkna subgradient, undre gräns och ev. övre gräns i varje punkt. Ange de bästa övre och undre gränserna som fås. Vet man huruvida optimum har uppnåtts? (Information från lösningen i uppgift 1 får inte användas.) (3p)

c) Försök genom att studera Lagrangerelaxationen finna något värde på u som gör att den optimala lösningen i uppgift 1d är optimal i subproblemet, eller visa att något sådant u ej finns. (1p)

Uppgift 3

Betrakta LP-relaxationen av problemet i uppgift 2, dvs. där $0 \le x \le 1$.

a) Antag att problemet ska lösas med Dantzig-Wolfedekomposition (med samma relaxation som i uppgift 2). Formulera sub- och masterproblem för detta problem, med $x^{(l)}$ som funna subproblemlösningar. Beskriv kortfattat lösningsmetodiken, samt vilka övre och undre gränser som fås. (1p)

b) Beräkna Dantzig-Wolfesnitten som fås av subproblemlösningarna som erhölls i uppgift 2, och sätt upp masterproblemet med aktuella siffror. Rita upp snitten och lös masterproblemet grafiskt. Beräkna målfuktionsvärdet i denna punkt och ange de bästa övre och undre gränserna, samt ange vilka snitt som är aktiva.

Lös subproblemet med det u masterproblemet ger, om masterproblemet indikerar att det kan ge bättre lösning. Tillför ev. nytt snitt grafiskt, och uppdatera masterproblemets lösning samt övre och undre gränser.

Använd komplementaritet och beräkna den duala/primala lösningen (λ) till masterproblemet och beräkna motsvarande konvexkombination av subproblemlösningar. Jämför lösningen med den optimala LP-lösningen (som kan fås med en girig metod i boken). (4p)

Uppgift 4

Linolf funderar på att betala för att få ta med incheckat bagage. Varje väska som checkas in kostar 20 och kan ta 20 kg, och han har inte mer än 3 väskor. Han aggregerar de saker som kan tas med i ett fåtal grupper. Låt x_j ange hur mycket han tar med sig av grupp j, och y antalet incheckade väskor han tar med. I nedanstående optimeringsmodell minimeras kostnaderna minus vinsten. Bivillkor 1 står för total bagagekapacitet, och bivillkor 2 anger vissa beroenden mellan grupperna.

$$
\begin{array}{rrcrcrcrcrl}
v^* = \min & -4x_1 & - & 3x_2 & - & x_3 & + & 20y & & & \\
\text{då} & x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & - & 20y & \le & 7 & (1) \\
 & 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & & & \le & 4 & (2) \\
 & x_1, & & x_2, & & x_3 & & & \ge & 0 & \\
 & & & & & & & \multicolumn{3}{r}{0 \le y \le 3, \text{heltal}} & \\
\end{array}
$$

a) Antag att Bendersdekomposition ska användas för att lösa problemet. Formulera sub- och masterproblem för detta problem, med $u^{(l)}$ som funna duallösningar till subproblemet. Beskriv kortfattat lösningsmetodiken, samt vilka övre och undre gränser som fås. (1p)

b) Lös problemet till optimalitet med Bendersdekomposition. Börja med att lösa subproblemet för $y = 0$ (inga incheckade väskor). Konstruera sedan det första Benderssnittet och sätt upp masterproblemet, och lös det på enklaste sätt. Lös sedan subproblemet i den erhållna punkten. Fortsätt iterera tills optimum nåtts. Ange i varje iteration bästa övre och undre gränser. Ange fullständig optimallösning. (Om man inte kommer på ett bättre sätt, kan masterproblemet lösas med fullständig uppräkning av de tillåtna lösningarna, även om detta givetvis inte får göras för verkliga problem.) (4p)

c) Hur många snitt har det fullständiga masterproblemet? (1p)

Uppgift 5

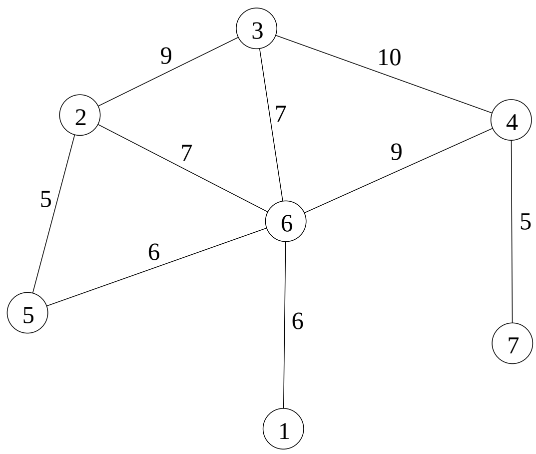
a) Förklara varför Dantzig-Wolfedekomposition alltid finner exakt optimum på ett ändligt antal iterationer. (1p)

b) Förklara varför Bendersdekomposition alltid finner exakt optimum på ett ändligt antal iterationer. (1p)

c) Förklara varför Lagrangerelaxation med subgradientoptimering kanske aldrig ger den optimala lösningen. (1p)

d) Förklara hur en subgradient dyker upp i Dantzig-Wolfesnitten. (1p)

Uppgift 6



Ovanstående graf föreställer gångarna i flygplatsen där flyget startar. Man behöver sopa gångarna då och då, och funderar på hur många sopmaskiner man hyra in, minst en, högst tre. Man kan placera maskinerna i vilken nod som helst, men de måste alltid återvända till denna nod, när de sopat färdigt. Varje maskin kostar 20 i hyrkostnad, oavsett hur mycket den används. På varje båge i grafen står tiden det tar att sopa den. Man vill dels att sopningen ska vara färdig så tidigt som möjligt, men har också en kostnad för att köra maskinerna, dvs. som är proportionell mot den totala längden en maskin kör.

Tiden för sopningen är maximum av tiderna för de maskinerna, och man använder lika vikter, dvs. målfunktionsvärdet för en lösning är summan av tiden och kostnaden. Maskinerna kör med konstant hastighet oavsett om de sopar eller ej.

Ledning: Ett lantbrevbärarproblem kan lösas på ungefär samma sätt som ett kinesiskt brevbärarproblem: förbind noder med udda valens på billigaste sätt för att se vilka bågar man ska lägga till (dvs. köra en extra gång).

a) Lös kinesiska brevbärarproblemet och beräkna kostnad, tid och målfunktionsvärde för en maskin. (1p)

b) Gör en smart uppdelning av bågarna mellan två maskiner, lös två lantbrevbärarproblem och beräkna total kostnad, tid och målfunktionsvärde för två maskiner. (2p)

c) Gör en smart uppdelning av bågarna mellan tre maskiner, lös tre lantbrevbärarproblem och beräkna total kostnad, tid och målfunktionsvärde för tre maskiner. (2p)

d) Vilket antal maskiner blir bäst? (1p)

Uppgift 7

Följande optimeringsproblem skulle kunna motiveras med mandatfördelning efter ett val. Vi hoppar dock över detaljerna här.

$$
\begin{array}{lll}
\min & f(x) = & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} (x_j - c_j)^2 \\
\text{då} & & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j = m \\
& & x_j \geq 0, \text{ heltal, för alla } j
\end{array}
$$

Vi ska använda följande data: $n = 5$, $m = 10$, $c = (1.6, 2.6, 3.0, 1.1, 1.7)$.

a) Formulera Lagrangerelaxationen där det första bivillkoret relaxeras. Notera att subproblemet separeras i ett problem per variabel. Lös subproblemet för $u = 0$. Eftersom målfunktionen är symmetrisk, fås heltalsoptimum till ett endimensionellt problem i den heltalspunkt som ligger närmast den kontinuerliga lösningen. Ange sedan, med hjälp av en subgradient, om u bör ökas eller minskas. (Observera att det är ett likhetsbivillkor.) (3p)

b) Beskriv hur subproblemet effektivt kan lösas för $u \neq 0$. (1p)

Uppgift 8

Betrakta grafen i uppgift 6. Man vill förbinda alla noder på billigaste sätt, vilket blir ett billigaste uppspännande träd, MST. Dock vill man av strategiska skäl att nod 6 får valensen 3. Uppgiften är alltså att finna billigaste uppspännande träd under extrabivillkoret att nod 6 får valens 3. Formulera Lagrangrerelaxationen av detta problem, så att man får ett normalt MST som subproblem. (Man kan formulera kravet att lösningen bildar ett träd som $x \in T$, utan att specificera T.)

Lös problemet för $u = 0$ och ange, mha. en subgradient, om u bör ökas eller minskas. Ange hur bågkostnaderna ändras då u ökas. Avgör, genom att studera subproblemet, hur mycket u måste ändras för att önskad lösning ska bli optimal i subproblemet. (Det går genom att studera en viss cykel i grafen.) Gör ändringen och lös om subproblemet.

Ange en tillåten lösning till problemet samt de bästa övre och undre gränserna som fås. (4p)