Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP61/TEN 1
OPTIMERING AV REALISTISKA SAMMANSATTA SYSTEM

Datum:	27 augusti 2019
Tid:	14.00-19.00
Hjälpmedel:	Miniräknare
	Kurslitteraturen: Kaj Holmberg: *Optimering*
	Kaj Holmberg: Introduktion till matematiska dekompositionsmetoder
	Anteckningar och annat skriftligt material.
Antal uppgifter:	7
Antal sidor:	6
	Uppgifterna är *inte* ordnade efter svårighetsgrad.
	Totalt antal poäng är 40. För godkänt krävs 16 poäng.
Examinator:	Kaj Holmberg
Jourhavande lärare:	Kaj Holmberg, tel 013-282867, epost kaj.holmberg@liu.se

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa dina beräkningar och din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden du gör.
Använd de standardmetoder som ingår i kursen.
Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla endast en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget vilka uppgifter du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.
Fotografera eller skanna in tentan och skicka in som en pdf-fil.
(Se separata instruktioner.)

Samtliga numeriska värden i denna tenta är påhittade. Sammanhangen är dock till stor del inspirerade av nuvarande verklighet.

Uppgift 1

Snackademiska Hus AB ska bygga lite nya trevliga hus på några universitetscampus. Man har gjort en lista över samtliga möjligheter, med total byggkostnad och uppskattad framtida intäkt för varje objekt.

Objekt	Byggkostnad (mkr)	Framtida intäkt
Studenthus, Campus Vivalla	3	10
Undervisningshus, Campus Amerika	4	8
Kårhus, Campus Närköping	2	7
Förråd, Campus Vivalla	1	4
Administrationbyggnad, Campus Vivalla	3	8

Man vill bygga så att man maximerar total framtida intäkt, men har en begränsad budget för byggkostnader på 10 mkr.

a) Formulera optimeringsproblemet som ett linjärt heltalsproblem, med variabeldefinition, bivillkor och målfunktion. (1p)

b) Ange alla nödvändiga definitioner för att lösa problemet med dynamisk programmering. (1p)

c) Lös problemet med dynamisk programmering. Ange svar. (3p)

d) På grund av den dåliga valutakursen blir de lettiska byggarbetarna dyrare än beräknat, så man justerar budgeten till 9 mkr. Finn ny optimal lösning (utnyttja resultaten från uppgift c.) (1p)

Uppgift 2

Betrakta optimeringsproblemet i uppgift 1d (med $b = 9$). Tips: Gör om till min-problem.

a) Applicera Lagrangerelaxation på problemet, med multiplikator u för budgetbivillkoret. Ange hur subproblemet löses, samt hur man får subgradienter till den duala funktionen. (1p)

b) Lös subproblemet för $u = 0, 2, 3, 4$. Beräkna subgradient, undre gräns och ev. övre gräns i varje punkt. Ange de bästa övre och undre gränserna som fås. Vet man huruvida optimum har uppnåtts? (Information från lösningen i uppgift 1 får inte användas.) (3p)

c) Försök genom att studera Lagrangerelaxationen finna något värde på u som gör att den optimala lösningen i uppgift 1d är optimal i subproblemet, eller visa att något sådant u ej finns. (1p)

Uppgift 3

Betrakta LP-relaxationen av problemet i uppgift 2, dvs. där $0 \leq x \leq 1$.

a) Antag att problemet ska lösas med Dantzig-Wolfedekomposition (med samma relaxation som i uppgift 2). Formulera sub- och masterproblem för detta problem, med $x^{(l)}$ som funna subproblemlösningar. Beskriv kortfattat lösningsmetodiken, samt vilka övre och undre gränser som fås. (1p)

b) Beräkna Dantzig-Wolfesnitten som fås av subproblemlösningarna som erhölls i uppgift 2, och sätt upp masterproblemet med aktuella siffror. Rita upp snitten och lös masterproblemet grafiskt. Beräkna målfuktionsvärdet i denna punkt och ange de bästa övre och undre gränserna, samt ange vilka snitt som är aktiva.

Lös subproblemet med det u masterproblemet ger, om masterproblemet indikerar att det kan ge bättre lösning. Tillför ev. nytt snitt grafiskt, och uppdatera masterproblemets lösning samt övre och undre gränser.

Använd komplementaritet och beräkna den duala/primala lösningen (λ) till masterproblemet och beräkna motsvarande konvexkombination av subproblemlösningar. Jämför lösningen med den optimala LP-lösningen (som kan fås med en girig metod i boken). (4p)

Uppgift 4

Snackademiska hus funderar på att anlita en underentrepenör, Bosses Bygg, som kan bidra med estniska byggarbetare, som är billigare. För en engångskostnad på 7 kan då högerledet i budgetbivillkoret ökas med 4. För övrigt gäller problemdata från uppgift 2. Man inför en binär variabel, y, som är 1 om man anlitar Bosses, och 0 om inte. (Man förenklar dock problemet genom att strunta i heltalskravet på x, såsom i uppgift 3.)

a) Formulera en linjär blandad optimeringsmodell som minimerar kostnaderna minus vinsten. (Glöm inte övre gräns 1 på x-variablerna.) (1p)

b) Antag att Bendersdekomposition ska användas för att lösa problemet. Formulera sub- och masterproblem för detta problem, med $u^{(l)}$ som funna duallösningar till subproblemet. Beskriv kortfattat lösningsmetodiken, samt vilka övre och undre gränser som fås. (1p)

c) Lös problemet till optimalitet med Bendersdekomposition. Börja med att lösa subproblemet för $y = 0$. Konstruera sedan det första Benderssnittet och sätt upp masterproblemet, och lös det på enklaste sätt. Lös sedan subproblemet i den erhållna punkten. Fortsätt iterera tills optimum nåtts. Ange i varje iteration bästa övre och undre gränser. Ange fullständig optimallösning.

Ledning: Subproblemet är ett kontinuerligt kappsäcksproblem, som kan lösas med metoden på sida 147 i boken. För att få den duala lösningen, börjar man med att sätta dualvariabeln u_j till noll för varje bivillkor $x_j \leq 1$ som inte är aktivt. Därefter sätts dualvariabeln för kappsäcksvillkoret, u_0, till max av $q_j = c_j/a_j$ för de j som har $x_j < 1$. Slutligen sätts $u_j = c_j - a_j u_0$ för de j som har $x_j = 1$. (5p)

Uppgift 5

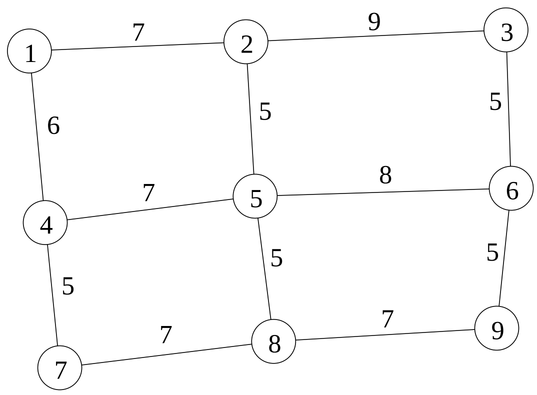
a) Förklara varför Dantzig-Wolfedekomposition alltid finner exakt optimum på ett ändligt antal iterationer. (1p)

b) Förklara varför Bendersdekomposition alltid finner exakt optimum på ett ändligt antal iterationer. (1p)

c) Förklara varför Lagrangerelaxation med subgradientoptimering kanske aldrig ger den optimala lösningen. (1p)

d) Förklara hur en subgradient dyker upp i Dantzig-Wolfesnitten. (1p)

Uppgift 6



Ovanstående graf föreställer korridorerna i det av Snackademiska Hus nybyggda Studenthuset. Nu ska man planera den dagliga städningen av korridorerna. (Det vore dumt att inte städa det nya huset ordentligt.) Man funderar på hur många sopmaskiner man ska använda, minst en, högst tre. Man kan placera maskinerna i vilken nod som helst, men de måste alltid återvända till denna nod, när de sopat färdigt. Varje maskin kostar 10 i inköp, oavsett hur mycket den används. På varje båge i grafen står tiden det tar att sopa den. Man vill dels att sopningen ska vara färdig så tidigt som möjligt, men har också en kostnad för att köra maskinerna, dvs. som är proportionell mot den totala längden en maskin kör.

Tiden för sopningen är maximum av tiderna för de maskinerna, och man använder lika vikter, dvs. målfunktionsvärdet för en lösning är summan av tiden och kostnaden. Maskinerna kör med konstant hastighet oavsett om de sopar eller ej.

Ledning: Ett lantbrevbärarproblem kan lösas på ungefär samma sätt som ett kinesiskt brevbärarproblem: förbind noder med udda valens på billigaste sätt för att se vilka bågar man ska lägga till (dvs. köra en extra gång).

a) Lös kinesiska brevbärarproblemet och beräkna kostnad, tid och målfunktionsvärde för en maskin. (1p)

b) Gör en smart uppdelning av bågarna mellan två maskiner, lös två lantbrevbärarproblem och beräkna total kostnad, tid och målfunktionsvärde för två maskiner. (2p)

c) Gör en smart uppdelning av bågarna mellan tre maskiner, lös tre lantbrevbärarproblem och beräkna total kostnad, tid och målfunktionsvärde för tre maskiner. (2p)

d) Vilket antal maskiner blir bäst? (1p)

Uppgift 7

Följande optimeringsproblem skulle kunna motiveras med mandatfördelning efter ett val. Vi hoppar dock över detaljerna här.

$$\begin{array}{rl} \min & f(x) \\ \text{då} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j = m \\ & x_j \geq 0, \ \text{heltal, för alla } j \end{array}$$

där man kan använda

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} (x_j - c_j)^2 \quad \text{eller} \quad f(x) = \sum_{j=1}^{n} (x_j - c_j)^2 / c_j.$$

(Den senare används i Sverige idag.) Man har också en riksdagsspärr, som säger att $x_j = 0$ om $c_j < l$.

Vi tittar specifikt på ett litet exempel med följande data: $n = 5$, $m = 10$, $c = (1.6, 2.6, 3.0, 1.1, 1.7)$, $l = 1.5$.

a) Formulera Lagrangerelaxationen där det första bivillkoret relaxeras. Notera att subproblemet separeras i ett problem per variabel. (Glöm inte spärren.) Lös subproblemet för $u = 0$. Eftersom målfunktionen är symmetrisk, fås heltalsoptimum till ett en-dimensionellt problem i den heltalspunkt som ligger närmast den kontinuerliga lösningen. Ange sedan, med hjälp av en subgradient, om u bör ökas eller minskas. (Observera att det är ett likhetsbivillkor.) Gör detta för båda de angivna målfunktionerna, och beskriv skillnaden i lösningen. (4p)

b) För $u \neq 0$ gäller följande för subproblemet. Eftersom målfunktionen är separabel och konvex, måste heltalsminimum ligga i en av de två heltalspunkterna som ligger närmast det kontinuerliga optimat. Problemet löses alltså genom att för varje j beräkna kontinuerlig lösning (mha. derivata), evaluera båda närliggande heltalspunkter och ta den bästa av dem.

Ändra u i den riktning subgradienten i uppgift a indikerade, med steglängd 1, dvs. sätt u lika med subgradienten. Lös subproblemet för båda de angivna målfunktionerna, och beskriv skillnaden i lösningen. (3p)