Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP61/TEN 1
OPTIMERING AV REALISTISKA SAMMANSATTA SYSTEM

Datum:	18 januari 2020
Tid:	8.00-13.00
Hjälpmedel:	Miniräknare
	Kurslitteraturen: Kaj Holmberg: *Optimering*
	Kaj Holmberg: Introduktion till matematiska dekompositionsmetoder
	Anteckningar och annat skriftligt material.
Antal uppgifter:	7
Antal sidor:	6
	Uppgifterna är *inte* ordnade efter svårighetsgrad.
	Totalt antal poäng är 40. För godkänt krävs 16 poäng.
Examinator:	Kaj Holmberg
Jourhavande lärare:	Kaj Holmberg, tel 013-282867, epost kaj.holmberg@liu.se

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa dina beräkningar och din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden du gör.
Använd de standardmetoder som ingår i kursen.
Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla endast en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget vilka uppgifter du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.
Fotografera eller skanna in tentan och skicka in som en pdf-fil.
(Se separata instruktioner.)

Samtliga numeriska värden i denna tenta är påhittade. Sammanhangen är dock till stor del inspirerade av nuvarande verklighet.

Uppgift 1

Lurköpings Centrala Inköps- och Avtalsnämnd, LuCIA, har bråda tider. Mycket har gått sönder och måste lagas. Man har tagit fram en lista på de mest akuta åtgärderna, men upptäcker att man inte har råd att genomföra dem alla. Listan nedan innehåller de olika projekten med kostnad och uppskattat värde för samhället.

Projekt	Kostnad (mkr)	Värde
Upprustning av vattenledningar	80	8
Elcykelpool	40	3
Lagning av gatytskikt i innerstaden	80	5
Planering av nytt bostadsområde	40	2
Ny idrottshall	100	6

Man vill genomföra de projekt som ger maximalt totalt värde, utan att överskrida budgeten på 200 mkr.

a) Formulera optimeringsproblemet som ett linjärt heltalsproblem, med variabeldefinition, bivillkor och målfunktion. (1p)

b) Skala om bivillkoret genom att dividera samtliga bivillkorskoefficienter inklusive högerledet med 20. Ange alla nödvändiga definitioner för att lösa problemet med dynamisk programmering. (1p)

c) Lös problemet med dynamisk programmering. Ange svar. (3p)

d) LuCIA kommer på att man redan har lovat bort 20 mkr till en försköning av Stora torget, så man får reducera budgeten till 180 mkr. Finn ny optimal lösning (utnyttja resultaten från uppgift c.) (1p)

e) Målfunktionskoefficienterna togs fram av en tjänsteman på LuCIA, och de är inte helt förankrade i organisationen. Vissa vill att skillnaden mellan värdena (i målfunktionen) ska öka. Tjänstemannen föreslår då att alla koefficienter ska multipliceras med två, vilket gör att skillnaderna ökar. Måste man då lösa om problemet helt, eller kan man på ett enklare sätt finna en ny optimallösning (med resultaten från uppgift c)? Motivera svaret. Lös ej om uppgiften. (1p)

Uppgift 2

Betrakta optimeringsproblemet i uppgift 1c (med $b = 10$). Tips: Gör om till min-problem.

a) Applicera Lagrangerelaxation på problemet, med multiplikator u för budgetbivillkoret. Ange hur subproblemet löses, samt hur man får subgradienter till den duala funktionen. (1p)

b) Lös subproblemet för $u = 0,\ 1,\ 1.5,\ 2$. Beräkna subgradient, undre gräns och ev. övre gräns i varje punkt. Ange de bästa övre och undre gränserna som fås. Vet man huruvida optimum har uppnåtts? (Information från lösningen i uppgift 1 får inte användas.) (3p)

c) Försök genom att studera Lagrangerelaxationen finna något värde på u som gör att den optimala lösningen i uppgift 1c är optimal i subproblemet, eller visa att något sådant u ej finns. (1p)

Uppgift 3

Betrakta LP-relaxationen av problemet i uppgift 2, dvs. där $0 \leq x \leq 1$.

a) Antag att problemet ska lösas med Dantzig-Wolfedekomposition (med samma relaxation som i uppgift 2). Formulera sub- och masterproblem för detta problem, med $x^{(l)}$ som funna subproblemlösningar. Beskriv kortfattat lösningsmetodiken, samt vilka övre och undre gränser som fås. (1p)

b) Beräkna Dantzig-Wolfesnitten som fås av subproblemlösningarna som erhölls i uppgift 2, och sätt upp masterproblemet med aktuella siffror. Rita upp snitten. Lös subproblemet med $u = 1.2$ och lägg även till detta snitt. Lös masterproblemet grafiskt. Beräkna målfunktionsvärdet i denna punkt och ange de bästa övre och undre gränserna, samt ange vilka snitt som är aktiva.

Använd komplementaritet och beräkna den duala/primala lösningen (λ) till masterproblemet och beräkna motsvarande konvexkombination av subproblemlösningar. Jämför lösningen med den optimala LP-lösningen (som kan fås med en girig metod i boken). (4p)

Uppgift 4

Betrakta problemet i uppgift 2. LuCIA funderar på att ta ett internt lån. Om man låter bli att utföra vissa åtgärder motsvarande 7 i värdekoefficient (målfunktionskoefficient), kan man öka högerledet i budgetbivillkoret med 4 (dvs. med 80 mkr). För övrigt gäller problemdata från uppgift 2. Man inför en binär variabel, y, som är 1 om man tar lånet, och 0 om inte. (Man förenklar dock problemet genom att strunta i heltalskravet på x, såsom i uppgift 3.)

a) Formulera en linjär blandad optimeringsmodell som minimerar kostnaderna minus vinsten. (Glöm inte övre gräns 1 på x-variablerna.) (1p)

b) Antag att Bendersdekomposition ska användas för att lösa problemet. Formulera sub- och masterproblem för detta problem, med $u^{(l)}$ som funna duallösningar till subproblemet. Beskriv kortfattat lösningsmetodiken, samt vilka övre och undre gränser som fås. (1p)

c) Lös problemet till optimalitet med Bendersdekomposition. Börja med att lösa subproblemet för $y = 0$. Konstruera sedan det första Benderssnittet och sätt upp masterproblemet, och lös det på enklaste sätt. Lös sedan subproblemet i den erhållna punkten. Fortsätt iterera tills optimum nåtts. Ange i varje iteration bästa övre och undre gränser. Ange fullständig optimallösning.

Ledning: Subproblemet är ett kontinuerligt kappsäcksproblem, som kan lösas med metoden på sida 147 i boken. För att få den duala lösningen, börjar man med att sätta dualvariabeln u_j till noll för varje bivillkor $x_j \leq 1$ som inte är aktivt. Därefter sätts dualvariabeln för kappsäcksvillkoret, u_0, till max av $q_j = c_j/a_j$ för de j som har $x_j < 1$. Slutligen sätts $u_j = c_j - a_j u_0$ för de j som har $x_j = 1$. (4p)

Uppgift 5

a) Förklara varför Dantzig-Wolfedekomposition alltid finner exakt optimum på ett ändligt antal iterationer. (1p)

b) Förklara varför Bendersdekomposition alltid finner exakt optimum på ett ändligt antal iterationer. (1p)

c) Förklara varför Lagrangerelaxation med subgradientoptimering kanske aldrig ger den optimala lösningen. (1p)

d) Förklara hur en subgradient dyker upp i Dantzig-Wolfesnitten. (1p)

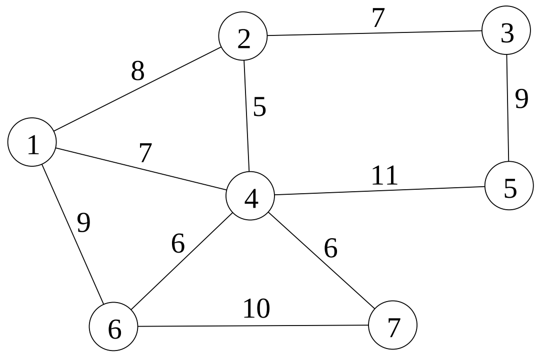
Uppgift 6

Följande graf föreställer några gator i Lurköping som ska asfalteras. Det ska göras med inhyrda asfalteringsmaskiner, och frågan är hur många man ska hyra in. Uthyrningsfirman har maximalt tre maskiner att hyra ut, och kan leverera varje maskin till valfri plats, men vill hämta upp den på samma plats efteråt.

Varje maskin kostar 10 i hyra, oavsett hur mycket den används. På varje båge i grafen står tiden det tar att asfaltera den i timmar. Man vill dels att asfalteringen ska vara färdig så tidigt som möjligt, men har också en kostnad för att köra maskinerna, som är proportionell mot den totala längden en maskin kör. Vi antar här att en timme motsvarar en enhets kostnad.

Tiden för asfalteringen är maximum av tiderna för maskinerna, och man använder lika vikter, dvs. målfunktionsvärdet för en lösning är summan av tiden och kostnaden. Maskinerna kör med konstant hastighet oavsett om de asfalterar eller ej.

Ledning: Ett lantbrevbärarproblem kan lösas på ungefär samma sätt som ett kinesiskt brevbärarproblem: förbind noder med udda valens på billigaste sätt för att se vilka bågar man ska lägga till (dvs. köra en extra gång).



a) Lös kinesiska brevbärarproblemet och beräkna kostnad, tid och målfunktionsvärde för en maskin. (1p)

b) Gör en smart uppdelning av bågarna mellan två maskiner, lös två lantbrevbärarproblem och beräkna total kostnad, tid och målfunktionsvärde för två maskiner. (2p)

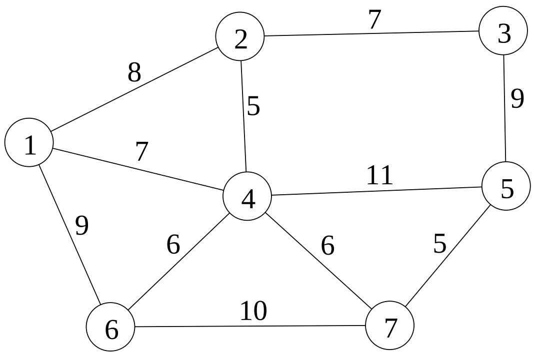
c) Gör en smart uppdelning av bågarna mellan tre maskiner, lös tre lantbrevbärarproblem och beräkna total kostnad, tid och målfunktionsvärde för tre maskiner. (2p)

d) Vilket antal maskiner blir bäst? (1p)

e) Uthyrningsfirman meddelar att det fasta priset för att hyra en maskin är förhandlingsbart. Hur stor skulle den fasta kostnaden behöva vara för att en maskin ska ge den bästa lösningen? Använd så mycket som möjligt av lösningsgången i de tidigare uppgifterna. (1p)

Uppgift 7

Man ska bygga ett nytt intranät i Lurköpings innerstad. Det är ett antal platser som ska kopplas ihop medelst fiber, och man anser att ett uppspännande träd bör passa bra (dvs. man behöver ingen extra säkerhet i form av ytterligare vägar mellan noderna). Se följande graf, där bågarna är märkta med kostnad för att installera fiber. Dock vill man inte att alla förbindelser ska gå via den centralt placerade datacentralen, nod 4. Därför kräver man att nod 4 ska högst ha valens tre. Man vill hitta den billigaste tillåtna lösningen. Vi får alltså ett billigaste uppspännande trädproblem med ett extra bivillkor.



a) Formulera det extra bivillkoret, och formulera Lagrangerelaxationen där det extra bivillkoret relaxeras. (1p)

b) Lös subproblemet (med Kruskals eller Prims metod) för $u = 0$, 1 och 2. Ange för varje u-punkt med hjälp av en subgradient om u bör ökas eller minskas. Ange bästa erhållna övre och undre gränser på det optimala målfunktionsvärdet, samt den bästa tillåtna lösning som fås (om någon sådan fås). (3p)

c) Antag att man har löst subproblemet för ett visst u, och att lösningen inte är tillåten. Hur kan man beräkna hur mycket man måste öka u för att lösningen ska ändras? Ledning: Ändringen i lösningen som kommer att ske är att en båge i en cykel som går genom noden med för hög valens byts mot en annan båge i samma cykel. (2p)