Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP61/TEN 1
OPTIMERING AV REALISTISKA SAMMANSATTA SYSTEM

Datum:	13 januari 2021
Tid:	8.00-13.00
Hjälpmedel:	Miniräknare Kurslitteraturen: Kaj Holmberg: *Optimering* Kaj Holmberg: Introduktion till matematiska dekompositionsmetoder Anteckningar och annat skriftligt material.
Antal uppgifter:	6
Antal sidor:	6 Uppgifterna är *inte* ordnade efter svårighetsgrad. Totalt antal poäng är 40. För godkänt krävs 16 poäng.
Examinator:	Kaj Holmberg
Jourhavande lärare:	Kaj Holmberg, tel 013-282867, epost kaj.holmberg@liu.se

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa dina beräkningar och din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden du gör.
Använd de standardmetoder som ingår i kursen.
Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla endast en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget vilka uppgifter du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.
Fotografera eller skanna in tentan och skicka in som en pdf-fil.
(Se separata instruktioner.)

Samtliga numeriska värden i denna tenta är påhittade. Sammanhangen är dock till stor del inspirerade av nuvarande verklighet.

Uppgift 1

Ett litet land som är drabbat av en pandemi ska skriva avtal om leveranser av vaccin. Man kan köpa från ett antal producenter, listade nedan. Producenterna erbjuder dock enbart paket, dvs. antingen ett visst antal doser till en viss kostnad, eller inget alls. Nedanstående tabell visar de olika producenterna, antal doser i paketet (skalat i enheter av lämpligt antal miljoner doser för att få heltal) samt kostnaden för paketet (med liknande skalning).

Producent	Antal doser	Kostnad
AstraZeneca	5	8
CureVac	4	7
Janssen-Cilag	3	5
Moderna	2	3
Pfizer/Biontech	4	6
Österåkras vaccinfabrik	1	1

Man vill skriva de avtal som ger minst 11 dosenheter, till minimal kostnad.

a) Formulera optimeringsproblemet som ett linjärt heltalsproblem, med variabeldefinition, bivillkor och målfunktion. (1p)

b) Omformulera problemet till ett max-problem, med $\leq$-bivillkor. Ledning: Fokusera istället på de producenter man *inte* skriver avtal med, genom att ersätta x_j med $(1 - x_j)$. (1p)

c) Ange alla nödvändiga definitioner för att lösa problemet i uppgift b med dynamisk programmering. (Den som inte lyckats lösa uppgift b kan istället använda problemet i uppgift a, som dock inte är lika mycket standard i denna kurs.) (1p)

d) Lös problemet med dynamisk programmering. Ange svar. (3p)

e) Man har förutsatt att de som redan haft sjukdomen inte behöver vaccineras, men myndigheterna har inte annonserat ut detta till allmänheten, så behovet av dosenheter förväntas öka till 13. Finn ny optimal lösning (utnyttja resultaten från uppgift d.) (1p)

f) De styrande i det lilla landet bestämmer att moms måste betalas vid inköp av vaccin, så för att täcka upp för detta och andra fördyringar anser man att alla kostnader ska multipliceras med två. Måste man då lösa om problemet helt, eller kan man på ett enklare sätt finna en ny optimallösning (med resultaten från uppgift d)? Motivera svaret. Lös ej om uppgiften. (1p)

Uppgift 2

Betrakta optimeringsproblemet i uppgift 1b, men omformulerat till ett min-problem (med $\leq$-bivillkor).

a) Applicera Lagrangerelaxation på problemet, med multiplikator u. Ange hur subproblemet löses, samt hur man får subgradienter till den duala funktionen. (1p)

b) Lös subproblemet för $u = 0,\ 1,\ 1.5,\ 1.6,\ 1.7$. Beräkna subgradient, undre gräns och ev. övre gräns i varje punkt. Ange de bästa övre och undre gränserna som fås. Vet man huruvida optimum har uppnåtts? (Information från lösningen i uppgift 1 får inte användas.) (4p)

c) Försök genom att studera Lagrangerelaxationen finna något värde på u som gör att den optimala lösningen i uppgift 1d är optimal i subproblemet, eller visa att något sådant u ej finns. (1p)

Uppgift 3

Betrakta LP-relaxationen av problemet i uppgift 2, dvs. där $0 \leq x \leq 1$.

a) Antag att problemet ska lösas med Dantzig-Wolfedekomposition (med samma relaxation som i uppgift 2). Formulera sub- och masterproblem för detta problem, med $x^{(l)}$ som funna subproblemlösningar. Beskriv kortfattat lösningsmetodiken, samt vilka övre och undre gränser som fås. (1p)

b) Beräkna Dantzig-Wolfesnitten som fås av subproblemlösningarna som erhölls i uppgift 2, för $u = 0,\ 1,\ 1.5,\ 1.7$, men inte $u = 1.6$. Sätt upp masterproblemet med aktuella siffror. Rita upp snitten. Lös masterproblemet grafiskt. Beräkna målfunktionsvärdet i denna punkt och ange de bästa övre och undre gränserna, samt ange vilka snitt som är aktiva.

Fortsätt att iterera mellan subproblem och masterproblem tills problemet är löst till optimalitet.

Använd komplementaritet och beräkna den duala/primala lösningen (λ) till masterproblemet och beräkna motsvarande konvexkombination av subproblemlösningar. Jämför lösningen med den optimala LP-lösningen (som kan fås med en girig metod i boken). (4p)

c) Antag att man inte kan/orkar lösa masterproblemet exakt, utan bara approximativt. Man kan då kontrollera om en viss u-lösning kan ge förbättring i subproblemet. Vi vill att subproblemet ska ge en högre undre gräns än vi har, och ett krav för att detta ska vara möjligt är att u-lösningen evaluerad i samtliga kända snitt i masterproblemet ska ge värden som är högre än den kända undre gränsen. Om något snitt skulle ge ett lägre värde är vi helt säkra på att subproblemet också kommer att ge ett sämre värde. Illustrera detta i figuren i uppgift b (eller i en ny figur baserad på samma data) och ge ett icke-optimalt värde på u som uppfyller kravet. (1p)

Uppgift 4

Betrakta problemet i uppgift 1. De styrande i det lilla landet kommer på att det kanske är bättre om man testar folk för antikroppar innan man vaccinerar dem, så kan man spara vaccinet till de som behöver det. Detta skulle dock kräva investeringar i utökad testningskapacitet samt information till allmänheten. Man tar fram tre olika scenarier för hur man med olika investeringar kan minska behovet av vaccin:
1. Ingen ändring.
2. Kostnad: 3, minskning av behov: 2.
3. Kostnad: 6, minskning av behov: 4.

Detta kan modelleras med hjälp av en heltalsvariabel, $y \in [0, 1, 2]$. För övrigt gäller problemdata från uppgift 2. (Man förenklar dock problemet genom att strunta i heltalskravet på x, såsom i uppgift 3.)

a) Formulera en linjär blandad optimeringsmodell som minimerar kostnaderna. (Glöm inte övre gräns 1 på x-variablerna. Observera också att i formuleringen i uppgift 1a minskar högerledet när y ökas, så i modellen i uppgift 1b ökar högerledet.) (1p)

b) Antag att Bendersdekomposition ska användas för att lösa problemet. Formulera sub- och masterproblem för detta problem, med $u^{(l)}$ som funna duallösningar till subproblemet. Beskriv kortfattat lösningsmetodiken, samt vilka övre och undre gränser som fås. (1p)

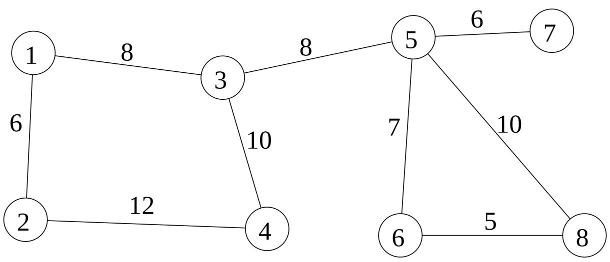
c) Lös problemet till optimalitet med Bendersdekomposition. Börja med att lösa subproblemet för $y = 0$. Konstruera sedan det första Benderssnittet och sätt upp masterproblemet, och lös det på enklaste sätt. Lös sedan subproblemet i den erhållna punkten. Fortsätt iterera tills optimum nåtts. Ange i varje iteration bästa övre och undre gränser. Ange fullständig optimallösning.

Ledning: Subproblemet är ett kontinuerligt kappsäcksproblem, som kan lösas med metoden på sida 147 i boken. För att få den duala lösningen, börjar man med att sätta dualvariabeln u_j till noll för varje bivillkor $x_j \leq 1$ som inte är aktivt. Därefter sätts dualvariabeln för kappsäcksvillkoret, u_0, till max av $q_j = c_j/a_j$ för de j som har $x_j < 1$. Slutligen sätts $u_j = c_j - a_j u_0$ för de j som har $x_j = 1$. (4p)

Uppgift 5

I en liten stad i ett litet land har de styrande bestämt att man ska rengöra alla gator med ett speciellt medel som anses kunna ta död på ett virus som sprides snabbt. Följande graf föreställer gatorna som ska rengöras, och det ska göras med inhyrda besprutningsmaskiner. Frågan är hur många maskiner man ska hyra in. Uthyrningsfirman har maximalt tre maskiner att hyra ut, och kan leverera varje maskin till valfri plats, men vill hämta upp den på samma plats efteråt. Varje maskin kostar 10 i hyra, oavsett hur mycket den används. På varje båge i grafen står tiden det tar att rengöra den. Man vill dels att rengöringen ska vara färdig så tidigt som möjligt, men har också en kostnad för att köra maskinerna, som är proportionell mot den totala längden en maskin kör. Vi antar här att en tidsenhet motsvarar en enhets kostnad. Tiden för rengöringen är maximum av tiderna för maskinerna, och man använder lika vikter, dvs. målfunktionsvärdet för en lösning är summan av tiden och kostnaden. Maskinerna kör med konstant hastighet oavsett om de rengör eller ej.

Ledning: Ett lantbrevbärarproblem kan lösas på ungefär samma sätt som ett kinesiskt brevbärarproblem (om bågarna som måste tas med bildar en sammanhängande graf): förbind noder med udda valens på billigaste sätt för att se vilka bågar man ska lägga till (dvs. köra en extra gång).



a) Lös kinesiska brevbärarproblemet och beräkna kostnad, tid och målfunktionsvärde för en maskin. (1p)

b) Gör en smart uppdelning av bågarna mellan två maskiner, lös två lantbrevbärarproblem och beräkna total kostnad, tid och målfunktionsvärde för två maskiner. (2p)

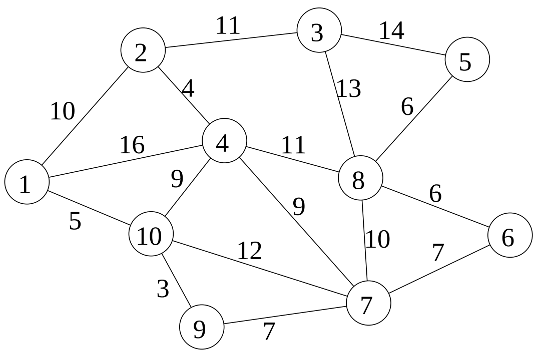
c) Gör en smart uppdelning av bågarna mellan tre maskiner, lös tre lantbrevbärarproblem och beräkna total kostnad, tid och målfunktionsvärde för tre maskiner. (2p)

d) Vilket antal maskiner blir bäst? (1p)

e) Uthyrningsfirman meddelar att det fasta priset för att hyra en maskin är förhandlingsbart. Hur stor skulle den fasta kostnaden behöva vara för att en, två resp. tre maskiner ska ge den bästa lösningen? Använd så mycket som möjligt av lösningsgången i de tidigare uppgifterna. (1p)

Uppgift 6

Man förbereder inför en kommande vaccinering genom att sätta upp en plan för distribution. Vaccin ska levereras till ett antal punkter (noder i nedanstående graf), men man vet inte hur mycket det blir och när det kommer. Därför anser man att en bra plan är att konstruera ett uppspännande träd där det totala avståndet är minimalt. Då har man bestämt i förväg vilka vägar som ska användas, samtidigt som man kan transportera vaccin mellan olika punkter på ett snabbt sätt, beroende på var det uppstår brist respektive överskott. I följande graf är bågarna är märkta med avstånd. Eftersom vaccinet ska förvaras vid mycket låg temperatur, vill man inte att det ska transporteras för lång väg mellan två punkter.



a) Finn billigaste/kortaste uppspännande träd (med Kruskals eller Prims metod), och finn den längsta vägen (i antalet bågar) mellan två noder. Målet är att antalet bågar ska minskas i denna väg. Formulera ett linjärt bivillkor som säger att alla bågarna i den vägen inte får användas, och formulera Lagrangerelaxationen där detta bivillkor relaxeras. Lös subproblemet (med Kruskals eller Prims metod) för $u = 1$. Ange en subgradient för $u = 0$ och $u = 1$ och vilken information subgradienten ger om huruvida u bör ökas eller minskas. Ange bästa erhållna övre och undre gränser på det optimala målfunktionsvärdet, samt den bästa tillåtna lösning som fås (om någon sådan fås). (4p)

b) Man bestämmer sig för att fokusera på vägen från nod 1 till nod 6, och ställer upp kravet att vägen mellan dessa två noder inte får innehålla mer än tre bågar. Man vill dock, under detta bivillkor, använda den kortaste vägen. Formulera Lagrangerelaxationen av problemet att finna billigaste/kortaste väg från nod 1 till nod 6, med ovanstående extra bivillkor relaxerat. Lös subproblemet för $u = 0$, 1 och 2. (Dijkstras metod kan användas om man beaktar båda riktningarna på varje båge.) Ange en subgradient i varje punkt. Ange bästa erhållna övre och undre gränser på det optimala målfunktionsvärdet, samt den bästa tillåtna lösning som fås (om någon sådan fås). (3p)