Matematiska institutionen
Optimeringslära

# TENTAMEN

## TAOP61/TEN 1
## OPTIMERING AV REALISTISKA SAMMANSATTA SYSTEM

| | |
|---|---|
| **Datum:** | 16 mars 2021 |
| **Tid:** | 14.00-19.00 |
| **Hjälpmedel:** | Miniräknare<br>Kurslitteraturen: Kaj Holmberg: *Optimering*<br>Kaj Holmberg: Introduktion till matematiska dekompositionsmetoder<br>Anteckningar och annat skriftligt material. |
| **Antal uppgifter:** | 6 |
| **Antal sidor:** | 6<br>Uppgifterna är *inte* ordnade efter svårighetsgrad.<br>Totalt antal poäng är 40. För godkänt krävs 16 poäng. |
| **Examinator:** | Kaj Holmberg |
| **Jourhavande lärare:** | Kaj Holmberg, tel 013-282867, epost kaj.holmberg@liu.se |

**Resultat meddelas per e-post**

## Tentamensinstruktioner

### När Du löser uppgifterna

*Redovisa dina beräkningar och din lösningsmetodik noga.*
*Motivera alla påståenden du gör.*
*Använd de standardmetoder som ingår i kursen.*
*Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.*
*Behandla endast en huvuduppgift på varje blad.*

### Vid skrivningens slut

*Sortera dina lösningsblad i uppgiftsordning.*
*Markera på omslaget vilka uppgifter du behandlat.*
*Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.*
*Fotografera eller skanna in tentan och skicka in som en pdf-fil.*
*(Se separata instruktioner.)*

Samtliga numeriska värden i denna tenta är påhittade. Sammanhangen är dock till stor del inspirerade av nuvarande verklighet.

## Uppgift 1

En regering i ett ganska litet land funderar på hur man ska använda sina (dvs. skattebetalarnas) pengar. Man har, liksom många andra länder, drabbats av en pandemi, vilket har drastiskt förändrat planeringssituationen. Man har enats om att slänga alla gamla planer i papperskorgen, och tänka nytt. Man behöver ta ställning till ett antal förslag på nysatsningar, vilka listas nedan. För att förenkla sitt beslutsfattande, bestämmer man att varje förslag tas i sin helhet, eller inte alls. Nedanstående tabell visar de olika förslagen, vad de skulle kosta och vilken samhällsnyttan man tror att de skulle ge.

| Förslag | Kostnad (mkr) | Nytta |
|---|---|---|
| Extra stödpaket till restaurangbranschen | 4 | 10 |
| Informationskampanj om vaccinering | 2 | 8 |
| Informationskampanj på främmande språk | 1 | 2 |
| Utökad testningskapacitet | 3 | 9 |
| Smittspårning | 4 | 11 |
| Extra inköp av vaccin via tredje part | 5 | 14 |

Man anser sig ha 13 mkr till dessa satsningar, och vill maximera förväntad samhällsnytta.

**a**) Formulera optimeringsproblemet som ett linjärt heltalsproblem, med variabeldefinition, bivillkor och målfunktion. (1p)

**b**) Ange alla nödvändiga definitioner för att lösa problemet i uppgift a med dynamisk programmering. (1p)

**c**) Lös problemet med dynamisk programmering. Ange svar. (3p)

**d**) Man har förutsatt oförändrade skatteintäkter, men ett större antal företag har gått i konkurs, så skatteintäkterna minskar. Därför anser man sig bara ha råd med 12 mkr till de föreslagna åtgärderna. Finn ny optimal lösning (utnyttja resultaten från uppgift c.) (1p)

## Uppgift 2

Betrakta optimeringsproblemet i uppgift 1a, men omformulerat till ett minproblem (med $\leq$-bivillkor).

**a**) Applicera Lagrangerelaxation på problemet, med multiplikator $u$. Ange hur subproblemet löses, samt hur man får subgradienter till den duala funktionen. (1p)

**b**) Lös subproblemet för $u = 1,\ 2,\ 3,\ 4$. Beräkna subgradient, undre gräns och ev. övre gräns i varje punkt. Ange de bästa övre och undre gränserna som fås.

Vet man huruvida optimum har uppnåtts? (Information från lösningen i uppgift 1 får inte användas.) (4p)

**c**) Försök genom att studera Lagrangerelaxationen finna något värde på $u$ som gör att den optimala lösningen i uppgift 1c är optimal i subproblemet, eller visa att något sådant $u$ ej finns. (1p)

### Uppgift 3

Betrakta LP-relaxationen av problemet i uppgift 2, dvs. där $0 \leq x \leq 1$.

**a**) Antag att problemet ska lösas med Dantzig-Wolfedekomposition (med samma relaxation som i uppgift 2). Formulera sub- och masterproblem för detta problem, med $x^{(l)}$ som funna subproblemlösningar. Beskriv kortfattat lösningsmetodiken, samt vilka övre och undre gränser som fås. (1p)

**b**) Beräkna Dantzig-Wolfesnitten som fås av subproblemlösningarna som erhölls i uppgift 2, för $u = 1,\ 2,\ 3,\ 4$. Sätt upp masterproblemet med aktuella siffror. Rita upp snitten. Lös masterproblemet grafiskt. Beräkna målfunktionsvärdet i denna punkt och ange de bästa övre och undre gränserna, samt ange vilka snitt som är aktiva. (3p)

**c**) Om optimum inte är uppnått, gör en iteration till i Dantzig-Wolfedekomposition, dvs. lös subproblemet, uppdatera och lös masterproblemet. Beräkna målfunktionsvärdet i denna punkt och ange de bästa övre och undre gränserna, samt vilka snitt som är aktiva.

Använd komplementaritet och beräkna den duala/primala lösningen ($\lambda$) till masterproblemet och beräkna motsvarande konvexkombination av subproblemlösningar. Jämför lösningen med den optimala LP-lösningen (som kan fås med en girig metod i boken). (3p)

**d**) Antag att man inte kan/orkar lösa masterproblemet exakt, utan bara approximativt. Man kan då kontrollera om en viss $u$-lösning kan ge förbättring i subproblemet. Vi vill att subproblemet ska ge en högre undre gräns än vi har, och ett krav för att detta ska vara möjligt är att $u$-lösningen evaluerad i samtliga kända snitt i masterproblemet ska ge värden som är högre än den kända undre gränsen. Om något snitt skulle ge ett lägre värde är vi helt säkra på att subproblemet också kommer att ge ett sämre värde. Illustrera detta i figuren i uppgift b (eller i en ny figur baserad på samma data) och ge ett icke-optimalt värde på $u$ som uppfyller kravet. (1p)

**Uppgift 4**

Betrakta problemet i uppgift 1. De styrande i det lilla landet kommer på att man kan låna pengar till de föreslagna åtgärderna. Man tar fram tre olika möjliga lån, vilka ger utökad budget till åtgärderna, men också framtida kostnader. Kostnaderna är här omräknade så att de är direkt jämförbara med samhällsnyttan i uppgift 1: 1. Lån 3, kostnad 3. 2. Lån 5, kostnad 6. 3. Lån 8, kostnad 9.

De tre lånen är oberoende av varandra, så för varje lån ska man bestämma om man ska ta det eller inte. För övrigt gäller problemdata från uppgift 1. (Man förenklar dock problemet genom att strunta i heltalskravet på $x$.)

**a**) Formulera en linjär blandad optimeringsmodell med tre binära $y$-variabler som minimerar kostnaderna. (Glöm inte övre gräns 1 på $x$-variablerna.) (1p)

**b**) Antag att Bendersdekomposition ska användas för att lösa problemet. Formulera sub- och masterproblem för detta problem, med $u^{(l)}$ som funna duallösningar till subproblemet. Beskriv kortfattat lösningsmetodiken, samt vilka övre och undre gränser som fås. (1p)

**c**) Lös problemet med Bendersdekomposition tills skillnaden mellan övre och undre gränsen är mindre än 2. Börja med att lösa subproblemet utan lån. Konstruera sedan det första Benderssnittet och sätt upp masterproblemet, och lös det på enklaste sätt. Lös sedan subproblemet i den erhållna punkten. Fortsätt iterera tills gränserna är tillräckligt nära varandra. (Se ledning 1 och 2 nedan.) Ange i varje iteration bästa övre och undre gränser. Ange den bästa lösningen.

Ledning 1: Subproblemet är ett kontinuerligt kappsäcksproblem, som kan lösas med metoden på sida 147 i boken (för maxproblem). För att få den duala lösningen, börjar man med att sätta dualvariabeln $u_j$ till noll för varje bivillkor $x_j \leq 1$ som inte är aktivt. Därefter sätts dualvariabeln för kappsäcksvillkoret, $u_0$, till max av $q_j = c_j/a_j$ för de $j$ som har $x_j < 1$. Slutligen sätts $u_j = c_j - a_j u_0$ för de $j$ som har $x_j = 1$.

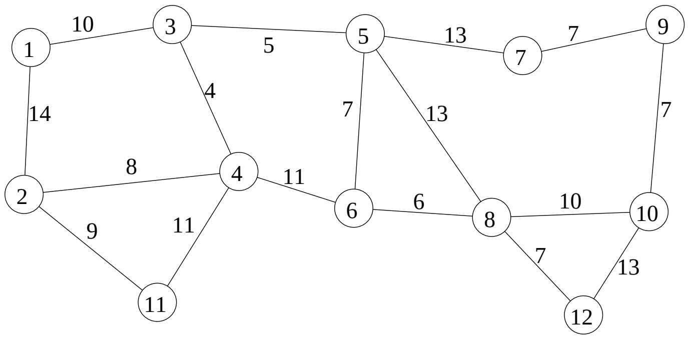
Ledning 2: I den andra iterationen ger masterproblemet lösningen $y = (1, 0, 0)$ och i den tredje iterationen $y = (1, 1, 0)$. Detta behöver inte bevisas, men masterproblemet ska sättas upp och dessa lösningar sättas in för att troliggöra detta. (5p)

**Uppgift 5**

I en liten stad i ett litet land har de styrande bestämt att utegångsförbud ska gälla nattetid av smittoskäl. Befolkningen verkar dock ovillig att foga sig i beslutet. Man planerar därför att låta polisen kontrollera gatorna nattetid, och bötfälla alla som olovligen är ute. Handgripliga protester är inte otänkbara, och bråkstakar måste arresteras, så man behöver använda piketbussar, som hyrs in från den närbelägna större staden. Man vill ha en plan där bussarna kör rundturer så att samtliga gator i staden kontrolleras (minst en gång). Frågan är hur många bussar som krävs. Man kan hyra maximalt tre bussar, och tänker sig att rundturerna kan börja var som helst. Kostnaderna består dels av fasta kostnader för varje inhyrd buss, samt lönekostnader med tillägg för obekväm arbetstid. Lönekostnaderna är proportionella mot tiden varje buss körs.

Varje buss kostar 20 i hyra, oavsett hur mycket den används. På varje båge i grafen står tiden det tar att köra den. Man vill dels att kontrollen ska vara färdig så tidigt som möjligt, men vill också minimera kostnaderna. Tiden för kontrollen är maximum av tiderna för bussarna, och man använder lika vikter, dvs. målfunktionsvärdet för en lösning är summan av tiden och kostnaden. Bussarna kör med konstant hastighet oavsett om de kört gatan tidigare.

Ledning: Ett lantbrevbärarproblem kan lösas på ungefär samma sätt som ett kinesiskt brevbärarproblem (om bågarna som måste tas med bildar en sammanhängande graf): förbind noder med udda valens på billigaste sätt för att se vilka bågar man ska lägga till (dvs. köra en extra gång).




**a**) Lös kinesiska brevbärarproblemet och beräkna kostnad, tid och målfunktionsvärde för en buss. (1p)

**b**) Gör en smart uppdelning av bågarna mellan två bussar lös två lantbrevbärarproblem och beräkna total kostnad, tid och målfunktionsvärde för två bussar. (2p)

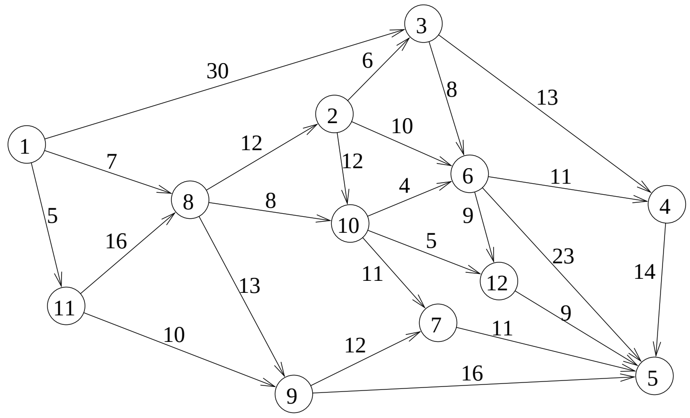
**c**) Gör en smart uppdelning av bågarna mellan tre bussar, lös tre lantbrevbärarproblem och beräkna total kostnad, tid och målfunktionsvärde för tre bussar. (2p)

**d**) Vilket antal bussar blir bäst? (1p)

**e**) Kostnaden för att hyra en buss är förhandlingsbar. För vilka fasta kostnader är en, två resp. tre bussar billigast? (Turerna och uppdelningarna i föregående deluppgifter får användas, även om de ej säkert är optimala.) (1p)

## Uppgift 6

Leveranserna av vaccin mot den pågående pandemin är försenade. Man förväntar sig dock ett flertal leveranser till flygplatsen i nod 1 i nedanstående graf. Man vill leverera dessa till sjukhusen i noderna 3, 4 och 5 så snabbt som möjligt när leveranserna kommer. För att förbereda inför detta, vill man i förväg finna lämpliga vägar att skicka vaccinet. I princip vill man använda de vägar som minimerar tiden tills vaccinet är framme i respektive nod. På bågarna i grafen anges transporttid, vilket är direkt proportionellt mot avståndet. (Transporterna antas gå med konstant hastighet.)



**a**) Finn bästa vägarna från flygplatsen till sjukhusen med lämplig metod. Ange hur lång tid det tar för leveranserna att komma fram. (1p)

**b**) Det visar sig att man måste packa om vaccinet vid varje nod, och man vill inte ha för många ompackningar, eftersom vaccinet ska förvaras vid mycket låg temperatur. Man fokuserar på vägen från nod 1 till nod 5, och ställer upp kravet att den vägen inte får innehålla mer än två noder (start- och slutnod oräknade). Man vill dock, under detta bivillkor, använda den kortaste vägen. Formulera detta bivillkor. (Ledning: Man kan enkelt göra om detta till ett bivillkor på antal bågar i vägen.)

Formulera Lagrangerelaxationen av problemet att finna kortaste väg från nod 1 till nod 5, med ovanstående extra bivillkor relaxerat. Bivillkoren att $x$ ger en väg från nod 1 till nod 5 kan anges som $x \in V(1,5)$. Öka $u$ med en enhet i taget och lös subproblemet. Upprepa tills en tillåten lösning erhålles. Ange en subgradient i varje punkt. Ange bästa erhållna övre och undre gränser på det optimala målfunktionsvärdet, samt den bästa tillåtna lösning som fås. (3p)

**c**) Gör samma sak som i uppgift b, men för vägarna 1-3 och 1-4. Det är tillåtet att öka $u$ med mer än en enhet om man kan ge en god motivering för det. Det är tillåtet att använda resultat från uppgift b. (2p)