Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP61/TEN 1
OPTIMERING AV REALISTISKA SAMMANSATTA SYSTEM

Datum:	24 augusti 2021
Tid:	14.00-19.00
Hjälpmedel:	Miniräknare
	Kurslitteraturen: Kaj Holmberg: *Optimering*
	Kaj Holmberg: Introduktion till matematiska dekompositionsmetoder
	Anteckningar i böckerna får förekomma.
Antal uppgifter:	7
Antal sidor:	6
	Uppgifterna är *inte* ordnade efter svårighetsgrad.
	Totalt antal poäng är 40. För godkänt krävs 16 poäng.
Examinator:	Kaj Holmberg
Jourhavande lärare:	Kaj Holmberg, tel 013-282867

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa dina beräkningar och din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden du gör.
Använd de standardmetoder som ingår i kursen.

Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla endast en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget vilka uppgifter du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.

Uppgift 1

Allkör AB har fått fler transportbeställningar än de klarar av. Speciellt ska de köra en lastbil från Kiruna till Esbjerg i Danmark med varor. Lastbilen har en begränsning på tillåten lastvikt, så man måste välja vilka beställningar som ska tas med. En kunds beställning levereras antingen i sin helhet, eller inte alls. Man känner till vikten på varje beställning, och vilken inkomst den skulle ge. (Man tillämpar individuell prissättning.) Detta anges i tabellen nedan. Lastbilen tar inte mer än 14 ton.

Beställning	Vikt (kg)	Vinst
1	5	3
2	8	7
3	10	8
4	3	4
5	6	9

a) Formulera optimeringsproblemet som ett linjärt heltalsproblem, med variabeldefinition, bivillkor och målfunktion. (1p)

b) Ange alla nödvändiga definitioner för att lösa problemet med dynamisk programmering. (1p)

c) Lös problemet med dynamisk programmering. Ange svar. (3p)

d) Det visar sig att vissa verktyg som tillsammans väger ett ton måste tas med, så man har bara 13 ton kvar till sina beställningar. Gör om uppgift c med denna förutsättning. (Utnyttja gärna resultaten från uppgift c.) (1p)

Uppgift 2

Betrakta optimeringsproblemet i uppgift 1a med modifieringen i uppgift 1d. Tips: Gör om till min-problem.

a) Applicera Lagrangerelaxation på problemet, med multiplikatorerna u för viktbivillkoret. Ange hur subproblemet löses, samt hur man får subgradienter till den duala funktionen. (2p)

b) Lös subproblemet för $u = 0$, $u = 0.8$, $u = 1.0$ och $u = 1.4$. Beräkna subgradient, undre gräns och ev. övre gräns i varje punkt. Ange de bästa övre och undre gränserna som fås. Vet man huruvida optimum har uppnåtts? (Information från lösningen i uppgift 1 får inte användas.) (3p)

c) Försök genom att studera Lagrangerelaxationen finna något värde på u som gör att den bästa tillåtna lösningen i uppgift 1 är optimal i subproblemet, eller visa att något sådant u ej finns. (1p)

Uppgift 3

Betrakta LP-relaxationen av problemet i uppgift 2, dvs. där $0 \leq x \leq 1$.

a) Antag att problemet ska lösas med Dantzig-Wolfedekomposition (med samma relaxation som i uppgift 2). Formulera sub- och masterproblem för detta problem, med $x^{(l)}$ som funna subproblemlösningar. Beskriv kortfattat lösningsmetodiken, samt vilka övre och undre gränser som fås. (1p)

b) Beräkna Dantzig-Wolfesnitten som fås av subproblemlösningarna som erhölls i uppgift 2. Sätt upp masterproblemet med aktuella siffror. Rita upp snitten. Lös masterproblemet grafiskt. Beräkna målfunktionsvärdet i denna punkt och ange de bästa övre och undre gränserna, samt ange vilka snitt som är aktiva.

Fortsätt att iterera mellan subproblem och masterproblem tills problemet är löst till optimalitet.

Använd komplementaritet och beräkna den duala/primala lösningen (λ) till masterproblemet och beräkna motsvarande konvexkombination av subproblemlösningar. Jämför lösningen med den optimala LP-lösningen (som kan fås med en girig metod i boken). (4p)

Uppgift 4

Allkör funderar på att hyra ett släp till lastbilen till transporten i uppgift 1. Det finns tre möjligheter: Ett stort släp som tar 5 ton och kostar 10, ett mindre som tar 2 ton och kostar 5, eller inget släp alls.

a) Modifiera optimeringsmodellen i uppgift 1 (eller snarare 2) genom att lägga till en heltalsvariabel för detta val, och skriv upp modellen. (1p)

b) Man vill använda Bendersdekomposition för att lösa problemet. Formulera sub- och masterproblem för detta problem, med $u^{(l)}$ som funna duallösningar till subproblemet. Beskriv kortfattat lösningsmetodiken, samt vilka övre och undre gränser som fås. (1p)

c) Lös problemet till optimalitet med Bendersdekomposition. Börja med att lösa subproblemet för $y = 0$. Konstruera sedan det första Benderssnittet och sätt upp masterproblemet, och lös det på enklaste sätt. Lös sedan subproblemet i den erhållna punkten. Fortsätt iterera tills optimum nåtts. Ange i varje iteration bästa övre och undre gränser. Ange fullständig optimallösning.

Ledning: Subproblemet är ett kontinuerligt kappsäcksproblem, som kan lösas med metoden på sida 147 i boken (för maxproblem). För att få den duala lösningen, börjar man med att sätta dualvariabeln u_j till noll för varje bivillkor $x_j \leq 1$ som inte är aktivt. Därefter sätts dualvariabeln för kappsäcksvillkoret, u_0, till max av $q_j = c_j/a_j$ för de j som har $x_j < 1$. Slutligen sätts $u_j = c_j - a_j u_0$ för de j som har $x_j = 1$. (4p)

d) Hur många snitt har det fullständiga masterproblemet? (1p)

Uppgift 5

a) Förklara varför Dantzig-Wolfedekomposition alltid finner exakt optimum på ett ändligt antal iterationer. (1p)

b) Förklara varför Bendersdekomposition alltid finner exakt optimum på ett ändligt antal iterationer. (1p)

c) Förklara varför Lagrangerelaxation med subgradientoptimering kanske aldrig ger den optimala lösningen. (1p)

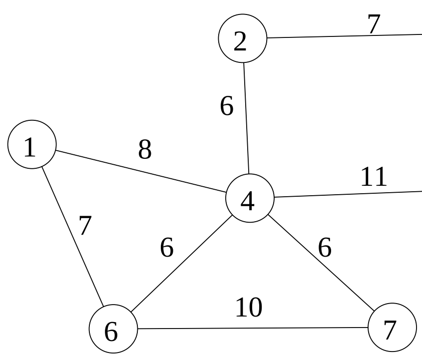
Uppgift 6

Följande graf föreställer några gator i Bjälbo som ska asfalteras. Det ska göras med inhyrda asfalteringsmaskiner, och frågan är hur många man ska hyra in. Uthyrningsfirman har maximalt tre maskiner att hyra ut, och kan leverera varje maskin till valfri plats, men vill hämta upp den på samma plats efteråt.

Varje maskin kostar 10 i hyra, oavsett hur mycket den används. På varje båge i grafen står tiden det tar att asfaltera den i timmar. Man vill dels att asfalteringen ska vara färdig så tidigt som möjligt, men har också en kostnad för att köra maskinerna, som är proportionell mot den totala längden en maskin kör. Vi antar här att en timme motsvarar en enhets kostnad.

Tiden för asfalteringen är maximum av tiderna för maskinerna, och man använder lika vikter, dvs. målfunktionsvärdet för en lösning är summan av tiden och kostnaden. Maskinerna kör med konstant hastighet oavsett om de asfalterar eller ej.

Ledning: Ett lantbrevbärarproblem kan lösas på ungefär samma sätt som ett kinesiskt brevbärarproblem: förbind noder med udda valens på billigaste sätt för att se vilka bågar man ska lägga till (dvs. köra en extra gång).



a) Lös kinesiska brevbärarproblemet och beräkna kostnad, tid och målfunktionsvärde för en maskin. (1p)

b) Gör en smart uppdelning av bågarna mellan två maskiner, lös två lantbrevbärarproblem och beräkna total kostnad, tid och målfunktionsvärde för två maskiner. (2p)

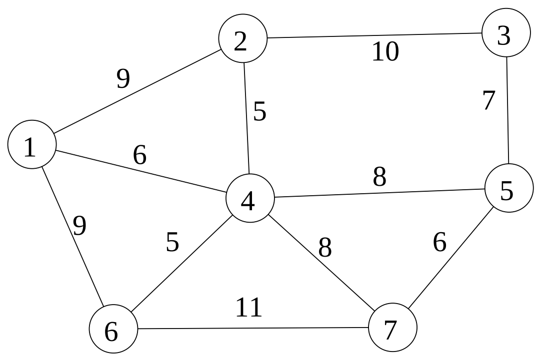
c) Gör en smart uppdelning av bågarna mellan tre maskiner, lös tre lantbrevbärarproblem och beräkna total kostnad, tid och målfunktionsvärde för tre maskiner. (2p)

d) Vilket antal maskiner blir bäst? (1p)

e) Uthyrningsfirman meddelar att det fasta priset för att hyra en maskin är förhandlingsbart. Hur stor skulle den fasta kostnaden behöva vara för att en maskin ska ge den bästa lösningen? Använd så mycket som möjligt av lösningsgången i de tidigare uppgifterna. (1p)

Uppgift 7

Man ska bygga ett nytt intranät i Bjälbo. Det är ett antal platser som ska kopplas ihop medelst fiber, och man anser att ett uppspännande träd bör passa bra (dvs. man behöver ingen extra säkerhet i form av ytterligare vägar mellan noderna). Se följande graf, där bågarna är märkta med kostnad för att installera fiber. Dock vill man inte att alla förbindelser ska gå via den centralt placerade datacentralen, nod 4. Därför kräver man att nod 4 ska högst ha valens tre. Man vill hitta den billigaste tillåtna lösningen. Vi får alltså ett billigaste uppspännande trädproblem med ett extra bivillkor.



a) Formulera det extra bivillkoret, och formulera Lagrangerelaxationen där det extra bivillkoret relaxeras. (1p)

b) Lös subproblemet (med Kruskals eller Prims metod) för $u = 0$, 1, 2 och 3. Ange för varje u-punkt med hjälp av en subgradient om u bör ökas eller minskas. Ange bästa erhållna övre och undre gränser på det optimala målfunktionsvärdet, samt den bästa tillåtna lösning som fås (om någon sådan fås). (3p)

c) Antag att man har löst subproblemet för ett visst u, och att lösningen inte är tillåten. Hur kan man beräkna hur mycket man måste öka u för att lösningen ska ändras? Ledning: Ändringen i lösningen som kommer att ske är att en båge i en cykel som går genom noden med för hög valens byts mot en annan båge i samma cykel. (2p)