Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP61/TEN 1
OPTIMERING AV REALISTISKA SAMMANSATTA SYSTEM

Datum:	12 januari 2022
Tid:	14.00-19.00
Hjälpmedel:	Miniräknare
	Kurslitteraturen: Kaj Holmberg: *Optimering*
	Kaj Holmberg: Introduktion till matematiska dekompositionsmetoder
	Anteckningar i böckerna får förekomma.
Antal uppgifter:	7
Antal sidor:	6
	Uppgifterna är *inte* ordnade efter svårighetsgrad.
	Totalt antal poäng är 40. För godkänt krävs 16 poäng.
Examinator:	Kaj Holmberg
Jourhavande lärare:	Kaj Holmberg, tel 013-282867

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa dina beräkningar och din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden du gör.
Använd de standardmetoder som ingår i kursen.

Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla endast en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget vilka uppgifter du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.

Uppgift 1

Landet Lilliput har haft val. Mandaten fördelades enligt nedanstående lista.

Parti	Antal mandat	Kostnad
Alldemokraterna (A)	5	0
Brademokraterna (B)	3	3
Centraldemokraterna (C)	2	1
Dumdemokraterna (D)	1	2
Estetdemokraterna (E)	1	1
Fuldemokraterna (F)	1	4
Grådemokraterna (G)	2	1

Uppdraget att formera regering gick till A, som största parti. Riksdagen i Lilliput har 15 mandat, så för att få majoritet krävs 8 mandat. Eftersom A inte har egen majoritet, krävs samarbete med andra partier. För varje parti uppskattar man en kostnad för att ha med partiet i regeringen, se tabellen ovan, eftersom varje parti har egna prioriteringar och kan förhindra A att göra som man vill.

Man sätter upp en optimeringsmodell för regeringsbildningen, med variablerna $x_j = 1$ om parti j *inte* ingår i regeringen. Det får då högst vara 7 mandat utanför regeringen. Eftersom man vill minimera totala kostnaden för de partier som ingår i regeringen, vill man maximera totala kostnaden för de partier som inte ingår i regeringen.

a) Formulera optimeringsproblemet som ett linjärt heltalsproblem, med bivillkor och målfunktion. (1p)

b) Ange alla nödvändiga definitioner för att lösa problemet med dynamisk programmering. (1p)

c) Lös problemet med dynamisk programmering. Ange svar. (3p)

d) Man inser att en av de invalda i A är lite opålitlig, och kan tänkas att rösta med oppositionen i vissa frågor. Därför vill man ha två mandats marginal, vilket betyder att man vill ha minst 9 mandat i regeringen, dvs. högst 6 mandat utanför regeringen. Gör om uppgift c med denna förutsättning. (Utnyttja gärna resultaten från uppgift c.) (1p)

Uppgift 2

Betrakta optimeringsproblemet i uppgift 1a, utan modifieringen i uppgift 1d. Tips: Gör om till min-problem.

a) Applicera Lagrangerelaxation på problemet, med multiplikatorerna u för viktbivillkoret. Ange hur subproblemet löses, samt hur man får subgradienter till den duala funktionen. (2p)

b) Lös subproblemet för $u = 0$, $u = 0.4$ och $u = 1.1$. Beräkna subgradient, undre gräns och ev. övre gräns i varje punkt. Ange de bästa övre och undre gränserna som fås. Vet man huruvida optimum har uppnåtts? (Information från lösningen i uppgift 1 får inte användas.) (3p)

c) Försök genom att studera Lagrangerelaxationen finna något värde på u som gör att den bästa tillåtna lösningen i uppgift 1 är optimal i subproblemet, eller visa att något sådant u ej finns. (1p)

Uppgift 3

Betrakta LP-relaxationen av problemet i uppgift 2, dvs. där $0 \le x \le 1$.

a) Antag att problemet ska lösas med Dantzig-Wolfedekomposition (med samma relaxation som i uppgift 2). Formulera sub- och masterproblem för detta problem, med $x^{(l)}$ som funna subproblemlösningar. Beskriv kortfattat lösningsmetodiken, samt vilka övre och undre gränser som fås. (1p)

b) Beräkna Dantzig-Wolfesnitten som fås av subproblemlösningarna som erhölls i uppgift 2. Sätt upp masterproblemet med aktuella siffror. Rita upp snitten. Lös masterproblemet grafiskt. Beräkna målfunktionsvärdet i denna punkt och ange de bästa övre och undre gränserna, samt ange vilka snitt som är aktiva.

Fortsätt att iterera mellan subproblem och masterproblem tills problemet är löst till optimalitet.

Använd komplementaritet och beräkna den duala/primala lösningen (λ) till masterproblemet och beräkna motsvarande konvexkombination av subproblemlösningar. Jämför lösningen med den optimala LP-lösningen (som kan fås med en girig metod i boken). (4p)

Uppgift 4

Partisekreteraren i parti A har en ide: Muta en eller två av ledamöterna från något annat parti med reformer som gynnar deras väljare. Att muta en ledamot kostar reformer motsvarande 0.3 (relativt de kostnader som anges i uppgift 1). Det kan möjliggöra en bättre regeringsbildning, tror man, dvs. en regering med färre partier och färre kompromisser, vilket ger lägre kostnad. Rent konkret innebär det att man kan lämna fler mandat utanför regeringen. Så för en kostnad av 0.3, ökas högerledet i problemet i uppgift 1a med 1, och för en kostnad av 0.6 ökas det med 2. Hur många ska man muta?

a) Modifiera optimeringsmodellen i uppgift 1a (eller snarare uppgift 3, dvs. som minproblem, utan heltalskrav på x) genom att lägga till en heltalsvariabel för detta val, och skriv upp modellen. (1p)

b) Man vill använda Bendersdekomposition för att lösa problemet. Formulera sub- och masterproblem för detta problem, med $u^{(l)}$ som funna duallösningar till subproblemet. Beskriv kortfattat lösningsmetodiken, samt vilka övre och undre gränser som fås. (1p)

c) Lös problemet till optimalitet med Bendersdekomposition. Börja med att lösa subproblemet för $y = 0$. Konstruera sedan det första Benderssnittet och sätt upp masterproblemet, och lös det på enklaste sätt. Lös sedan subproblemet i den erhållna punkten. Fortsätt iterera tills optimum nåtts. Ange i varje iteration bästa övre och undre gränser. Ange fullständig optimallösning.

Ledning: Subproblemet är ett kontinuerligt kappsäcksproblem, som kan lösas med metoden på sida 147 i boken (för maxproblem). För att få den duala lösningen, börjar man med att sätta dualvariabeln u_j till noll för varje bivillkor $x_j \leq 1$ som inte är aktivt. Därefter sätts dualvariabeln för kappsäcksvillkoret, u_0, till max av $q_j = c_j/a_j$ för de j som har $x_j < 1$. Slutligen sätts $u_j = c_j - a_j u_0$ för de j som har $x_j = 1$. (4p)

d) En nackdel med ovanstående metod är att variablerna i subproblemet är kontinuerliga, vilket gör att man missar heltaligheten i att ett parti antingen är i regeringen helt eller inte alls. Diskutera följderna av detta för problemets lösning, och om man kan övervinna denna svårighet och i så fall hur. (2p)

Uppgift 5

a) Förklara varför Dantzig-Wolfedekomposition alltid finner exakt optimum på ett ändligt antal iterationer. (1p)

b) Förklara varför Bendersdekomposition alltid finner exakt optimum på ett ändligt antal iterationer. (1p)

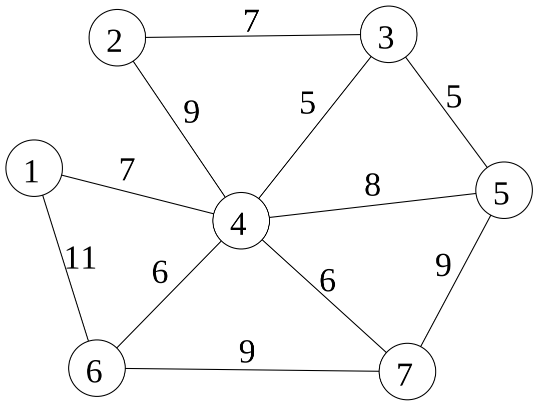
Uppgift 6

Följande graf föreställer några gator i Brobdingnag, huvudstaden i Lilliput, som ska snöröjas. Det ska göras med inhyrda snöplogar, och frågan är hur många man ska hyra in. Uthyrningsfirman har maximalt tre plogar att hyra ut, och kan leverera varje plog till valfri plats, men vill hämta upp den på samma plats efteråt.

Varje snöplog kostar 10 i hyra, oavsett hur mycket den används. På varje båge i grafen står tiden det tar att röja den i timmar. Man vill dels att snöröjningen ska vara färdig så tidigt som möjligt, men har också en kostnad för att köra plogarna, som är proportionell mot den totala längden en plog kör. Vi antar här att en timme motsvarar en enhets kostnad.

Tiden för snöröjningen är maximum av tiderna för plogarna, och man använder lika vikter, dvs. målfunktionsvärdet för en lösning är summan av tiden och kostnaden. Plogarna kör med konstant hastighet oavsett om de asfalterar eller ej.

Ledning: Ett lantbrevbärarproblem kan lösas på ungefär samma sätt som ett kinesiskt brevbärarproblem: förbind noder med udda valens på billigaste sätt för att se vilka bågar man ska lägga till (dvs. köra en extra gång).



a) Lös kinesiska brevbärarproblemet och beräkna kostnad, tid och målfunktionsvärde för en maskin. (1p)

b) Gör en smart uppdelning av bågarna mellan två plogar, lös två lantbrevbärarproblem och beräkna total kostnad, tid och målfunktionsvärde för två plogar. (2p)

c) Gör en smart uppdelning av bågarna mellan tre plogar, lös tre lantbrevbärarproblem och beräkna total kostnad, tid och målfunktionsvärde för tre plogar. (2p)

d) Vilket antal plogar blir bäst? (1p)

e) Uthyrningsfirman meddelar att det fasta priset för att hyra en snöplog är förhandlingsbart. Hur stor skulle den fasta kostnaden behöva vara för att en plog ska ge den bästa lösningen? Använd så mycket som möjligt av lösningsgången i de tidigare uppgifterna. (1p)

Uppgift 7

Man ska bygga ett nytt intranät i Brobdingnag. Det är ett antal platser som ska kopplas ihop medelst fiber, och man anser att ett uppspännande träd bör passa bra (dvs. man behöver ingen extra säkerhet i form av ytterligare vägar mellan noderna). Se grafen i föregående uppgift, där bågarna är märkta med kostnad för att installera fiber. Dock vill man inte att alla förbindelser ska gå via den centralt placerade datacentralen, nod 4. Därför kräver man att nod 4 ska högst ha valens tre. Man vill hitta den billigaste tillåtna lösningen. Vi får alltså ett billigaste uppspännande trädproblem med ett extra bivillkor.

a) Formulera det extra bivillkoret, och formulera Lagrangerelaxationen där det extra bivillkoret relaxeras. (1p)

b) Lös subproblemet (med Kruskals eller Prims metod) för $u = 0$, 1, 2 och 3. Ange för varje u-punkt med hjälp av en subgradient om u bör ökas eller minskas. Ange bästa erhållna övre och undre gränser på det optimala målfunktionsvärdet, samt den bästa tillåtna lösning som fås (om någon sådan fås). (3p)

c) Antag att man har löst subproblemet för ett visst u, och att lösningen inte är tillåten. Hur kan man beräkna hur mycket man måste öka u för att lösningen ska ändras? Ledning: Ändringen i lösningen som kommer att ske är att en båge i en cykel som går genom noden med för hög valens byts mot en annan båge i samma cykel. (2p)