Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP61/TEN 1
OPTIMERING AV REALISTISKA SAMMANSATTA SYSTEM

Datum:	16 mars 2022
Tid:	14.00-19.00
Hjälpmedel:	Miniräknare
	Kurslitteraturen: Kaj Holmberg: *Optimering*
	Kaj Holmberg: Introduktion till matematiska dekompositionsmetoder
	Anteckningar i böckerna får förekomma.
Antal uppgifter:	7
Antal sidor:	5
	Uppgifterna är *inte* ordnade efter svårighetsgrad.
	Totalt antal poäng är 40. För godkänt krävs 16 poäng.
Examinator:	Kaj Holmberg
Jourhavande lärare:	Kaj Holmberg, tel 013-282867

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa dina beräkningar och din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden du gör.
Använd de standardmetoder som ingår i kursen.

Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla endast en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget vilka uppgifter du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.

Uppgift 1

En hjälporganisation ska köra skänkta varor till ett annat land där det pågår oroligheter, och många flyktingar finns. Man har inte tid att sortera varorna, utan för varje container tar man med hela innehållet, eller inget alls. Vikten av innehållet i de olika containrarna ges nedan. Man har även gjort en grov uppskattning av värdet av innehållet. (Folk skänker inte alltid det som mest behövs. Uttjänta leksaker och trasiga kläder finns det lite för mycket av.) Lastbilen tar högst 6 ton.

Container	Vikt (ton)	Värde
1	3	8
2	2	5
3	2	3
4	1	9

Från vilka containrar ska man ta med innehållet? Man vill maximera värdet av det medtagna.

a) Formulera optimeringsproblemet som ett linjärt heltalsproblem, med bivillkor och målfunktion. (1p)

b) Ange alla nödvändiga definitioner för att lösa problemet med dynamisk programmering. (1p)

c) Lös problemet med dynamisk programmering. Ange svar. (3p)

d) För att ha lite extra marginal, kan man bestämma att inte lasta på mer än 5 ton på lastbilen. Utnyttja lösningen i uppgift c för att ta fram vilken lösning som då är optimal, och vilket målfunktionsvärde man får. Ska man göra så, om man accepterar en försämring av målfunktionsvärdet med 3, men inte mer? (1p)

Uppgift 2

Betrakta optimeringsproblemet i uppgift 1a, utan modifieringen i uppgift 1d. Tips: Gör om till min-problem.

a) Applicera Lagrangerelaxation på problemet, med multiplikatorerna u för viktbivillkoret. Ange hur subproblemet löses, samt hur man får subgradienter till den duala funktionen. (2p)

b) Lös subproblemet för $u = 0$, $u = 2$ och $u = 3$. Beräkna subgradient, undre gräns och ev. övre gräns i varje punkt. Ange de bästa övre och undre gränserna som fås. Vet man huruvida optimum har uppnåtts? (Information från lösningen i uppgift 1 får inte användas.) (3p)

c) Försök genom att studera Lagrangerelaxationen finna något värde på u som gör att den bästa tillåtna lösningen i uppgift 1 är optimal i subproblemet, eller visa att något sådant u ej finns. (1p)

Uppgift 3

Betrakta LP-relaxationen av problemet i uppgift 2, dvs. där $0 \leq x \leq 1$.

a) Antag att problemet ska lösas med Dantzig-Wolfedekomposition (med samma relaxation som i uppgift 2). Formulera sub- och masterproblem för detta problem, med $x^{(l)}$ som funna subproblemlösningar. Beskriv kortfattat lösningsmetodiken, samt vilka övre och undre gränser som fås. (1p)

b) Beräkna Dantzig-Wolfesnitten som fås av subproblemlösningarna som erhölls i uppgift 2. Sätt upp masterproblemet med aktuella siffror. Rita upp snitten. Lös masterproblemet grafiskt. Beräkna målfunktionsvärdet i denna punkt och ange de bästa övre och undre gränserna, samt ange vilka snitt som är aktiva.

Fortsätt att iterera på detta sätt mellan subproblem och masterproblem tills problemet är löst till optimalitet.

Använd komplementaritet och beräkna den duala/primala lösningen (λ) till masterproblemet och beräkna motsvarande konvexkombination av subproblemlösningar. Jämför lösningen med den optimala LP-lösningen (som kan fås med en girig metod i boken). (4p)

Uppgift 4

Om man sätter på en eller två släpvagnar på lastbilen, kan man öka kapaciteten antingen med 1 ton till kostnaden 1, eller med 2 ton till kostnaden 2.

a) Modifiera optimeringsmodellen i uppgift 1a (eller snarare uppgift 3, dvs. som minproblem, utan heltalskrav på x) genom att lägga till en heltalsvariabel för detta val, och skriv upp modellen. (1p)

b) Man vill använda Bendersdekomposition för att lösa problemet. Formulera sub- och masterproblem för detta problem, med $u^{(l)}$ som funna duallösningar till subproblemet. Beskriv kortfattat lösningsmetodiken, samt vilka övre och undre gränser som fås. (1p)

c) Lös problemet till optimalitet med Bendersdekomposition. Börja med att lösa subproblemet för $y = 0$. Konstruera sedan det första Benderssnittet och sätt upp masterproblemet, och lös det på enklaste sätt. Lös sedan subproblemet i den erhållna punkten. Fortsätt iterera tills optimum nåtts. Ange i varje iteration bästa övre och undre gränser. Ange fullständig optimallösning.

Ledning: Subproblemet är ett kontinuerligt kappsäcksproblem, som kan lösas med metoden på sida 147 i boken (för maxproblem). För att få den duala lösningen, börjar man med att sätta dualvariabeln u_j till noll för varje bivillkor $x_j \leq 1$ som inte är aktivt. Därefter sätts dualvariabeln för kappsäcksvillkoret, u_0, till max av $q_j = c_j/a_j$ för de j som har $x_j < 1$. Slutligen sätts $u_j = c_j - a_j u_0$ för de j som har $x_j = 1$. (4p)

Uppgift 5

a) Förklara varför Dantzig-Wolfedekomposition alltid finner exakt optimum för ett LP-problem på ett ändligt antal iterationer. (1p)

b) Förklara varför Bendersdekomposition alltid finner exakt optimum för ett linjärt blandat heltalsproblem på ett ändligt antal iterationer. (1p)

c) Varför kan man inte lösa ett rent heltalsproblem med Bendersdekomposition? (1p)

d) Varför kan man inte lösa ett blandat heltalsproblem med Dantzig-Wolfedekomposition? (1p)

e) Varför kan man inte vara säker på att Lagrangerelaxation med subgradientoptimering ger korrekt primal optimallösning? (1p)

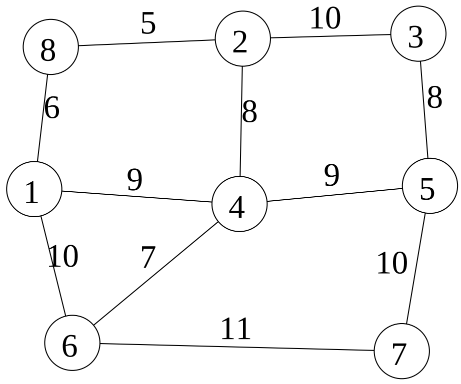
Uppgift 6

Följande graf föreställer några gator i en fjärran stad där bråte ska röjas undan efter stridigheter. Det ska göras med lastbilar, och frågan är hur många man ska använda. Man kan använda maximalt tre stycken, och man tänker sig att de ska köra i rundturer med valfri startnod (som är lika med slutnoden).

Varje lastbil kostar 10 i fast kostnad, oavsett hur mycket den används. På varje båge i grafen står tiden det tar att röja den i timmar. Man vill dels att röjningen ska vara färdig så tidigt som möjligt, men har också en kostnad för att köra bilarna, som är proportionell mot den totala längden en bil kör. Vi antar här att en timme motsvarar en enhets kostnad.

Tiden för röjningen är maximum av tiderna för bilarna, och man använder lika vikter, dvs. målfunktionsvärdet för en lösning är summan av tiden och kostnaden. Bilarna kör med konstant hastighet oavsett om de röjer eller ej.

Ledning: Ett lantbrevbärarproblem kan lösas på ungefär samma sätt som ett kinesiskt brevbärarproblem: förbind noder med udda valens på billigaste sätt för att se vilka bågar man ska lägga till (dvs. köra en extra gång).



a) Lös kinesiska brevbärarproblemet och beräkna kostnad, tid och målfunktionsvärde för en maskin. (1p)

b) Gör en smart uppdelning av bågarna mellan två bilar, lös två lantbrevbärarproblem och beräkna total kostnad, tid och målfunktionsvärde för två bilar. (2p)

c) Gör en smart uppdelning av bågarna mellan tre bilar, lös tre lantbrevbärarproblem och beräkna total kostnad, tid och målfunktionsvärde för tre bilar. (2p)

d) Vilket antal bilar blir bäst? (1p)

e) Man är osäker på det fasta priset för en bil. Hur stor skulle den fasta kostnaden behöva vara för att en bil ska ge den bästa lösningen? Använd så mycket som möjligt av lösningsgången i de tidigare uppgifterna. (1p)

Uppgift 7

Man ska bygga ett nytt intranät i orten i föregående uppgift, eftersom det gamla har blivit förstört. Det är ett antal platser (noder) som ska kopplas ihop medelst fiber, och man anser att ett uppspännande träd bör passa bra. Se grafen i föregående uppgift, där bågarna är märkta med kostnad för att installera fiber. Dock vill man av säkerhetsskäl att inte för många förbindelser ska gå via den centralt placerade nod 4, utan kräver att nod 4 ska högst ha valens två. Man vill hitta den billigaste tillåtna lösningen. Vi får alltså ett billigaste uppspännande trädproblem med ett extra bivillkor.

a) Formulera det extra bivillkoret, och formulera Lagrangerelaxationen där det extra bivillkoret relaxeras. (1p)

b) Lös subproblemet (med Kruskals eller Prims metod) för $u = 0$, 1, 2 och 3. Ange för varje u-punkt med hjälp av en subgradient om u bör ökas eller minskas. Ange bästa erhållna övre och undre gränser på det optimala målfunktionsvärdet, samt den bästa tillåtna lösning som fås (om någon sådan fås). (4p)