Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP61/TEN1
OPTIMERING AV REALISTISKA SAMMANSATTA SYSTEM

Datum:	11 januari 2023
Tid:	8.00-13.00
Hjälpmedel:	Miniräknare
	Kurslitteraturen: Kaj Holmberg: *Optimering*
	Kaj Holmberg: Introduktion till matematiska dekompositionsmetoder
	Anteckningar i böckerna får förekomma.
Antal uppgifter:	7
Antal sidor:	6
	Uppgifterna är *inte* ordnade efter svårighetsgrad.
	Totalt antal poäng är 40. För godkänt krävs 16 poäng.
Examinator:	Kaj Holmberg
Jourhavande lärare:	Kaj Holmberg, tel 013-282867

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa dina beräkningar och din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden du gör.
Använd de standardmetoder som ingår i kursen.

Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla endast en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget vilka uppgifter du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.

Uppgift 1

Familjen Myseson har fått allt högre elräkningar. Man bestämmer att det är dags att se över elanvändningen, bland annat vilken belysning man har tänd. Om man släcker vissa lampor, och stänger av vissa elförbrukande saker, kan man spara el, och därmed pengar. Och i ärlighetens namn är inte all belysning nödvändig, utan ibland mest till för att ge trevlig stämning.

För att strukturera beslutet, bestämmer man att elen får kosta högst 7000 kr i december. (Man räknar med approximativa belopp i hela tusental eftersom osäkerheten är betydande.)

I nedanstående tabell ges det som man brukar använda och skulle kunna tänka sig stänga av, vad det förväntas kosta i hela tusental, samt en koefficient hur värdefull man anser det vara.

Belysning	Kostnad	Värde
Julbelysning, ute, framsidan	2	3
Julbelysning, ute, baksidan	2	1
Utebelysning vid taket, framsidan	2	2
Julgransbelysning, inne	2	4
Julljusstakar, inne	3	3
Direktverkande elelement i gästrummet	4	3

Man vill alltså bestämma vad som ska vara på så att kostnaden inte överstiger 7 och värdet blir maximalt.

a) Formulera optimeringsproblemet som ett linjärt heltalsproblem, med variabeldefinition, bivillkor och målfunktion. (1p)

b) Ange alla nödvändiga definitioner för att lösa problemet med dynamisk programmering. (1p)

c) Lös problemet med dynamisk programmering. Ange svar. Hur hade lösandet påverkats om man hade räknat i enkronor istället för tusenlappar? (3p)

d) Priserna stiger snabbt, inte bara på el, så man bestämmer sig för att minska högerledet från 7 till 6. Ta fram optimal lösning till uppgift c med denna förutsättning. (Utnyttja resultaten från uppgift c.) (1p)

Uppgift 2

Betrakta optimeringsproblemet i uppgift 1a, utan modifieringen i uppgift 1d. Tips: Gör om till min-problem.

a) Applicera Lagrangerelaxation på problemet, med multiplikatorerna u för viktbivillkoret. Ange hur subproblemet löses, samt hur man får subgradienter till den duala funktionen. (2p)

b) Lös subproblemet för $u = 0$, $u = 0.5$, $u = 1$ och $u = 2$. Beräkna subgradient, undre gräns och ev. övre gräns i varje punkt. Ange de bästa övre och undre gränserna som fås. Vet man huruvida optimum har uppnåtts? (Information från lösningen i uppgift 1 får inte användas.) (3p)

c) Försök genom att studera Lagrangerelaxationen finna något värde på u som gör att den bästa tillåtna lösningen i uppgift 1 är optimal i subproblemet, eller visa att något sådant u ej finns. (1p)

Uppgift 3

Betrakta LP-relaxationen av problemet i uppgift 2, dvs. där $0 \leq x \leq 1$.

a) Antag att problemet ska lösas med Dantzig-Wolfedekomposition (med samma relaxation som i uppgift 2). Formulera sub- och masterproblem för detta problem, med $x^{(l)}$ som funna subproblemlösningar. Beskriv kortfattat lösningsmetodiken, samt vilka övre och undre gränser som fås. (1p)

b) Beräkna Dantzig-Wolfesnitten som fås av subproblemlösningarna som erhölls i uppgift 2. Sätt upp masterproblemet med aktuella siffror. Rita upp snitten. Lös masterproblemet grafiskt. Beräkna målfunktionsvärdet i denna punkt och ange de bästa övre och undre gränserna, samt ange vilka snitt som är aktiva.

Fortsätt att iterera mellan subproblem och masterproblem tills problemet är löst till optimalitet.

Använd komplementaritet och beräkna den duala/primala lösningen (λ) till masterproblemet och beräkna motsvarande konvexkombination av subproblemlösningar. Jämför lösningen med den optimala LP-lösningen (som kan fås med en girig metod i boken). (4p)

Uppgift 4

Familjen Myseson funderar på att investera i solceller för att minska framtida elräkningar. Det är dock svårt att veta om det kommer att löna sig. Man delar upp installationskostnaden på ett lämpligt antal år och beräknar sedan hur mycket solcellerna skulle bidra till elförsörjningen. Det finns två olika utbyggnadsalternativ, som resulterar i följande möjliga ändringar i problemet i uppgift 1, med relaxationen i uppgift 3. För kostnaden 1 skulle högerledet ökas med 2 (till 9), och för kostnaden 3 skulle högerledet ökas med 4 (till 11). Så frågan är vilket alternativ av dessa två, eller inga solceller alls, som vore mest lönsamt.

a) Modifiera optimeringsmodellen i uppgift 1a (eller snarare uppgift 3, dvs. som minproblem, utan heltalskrav på x) genom att lägga till heltalsvariabler för detta val, och skriv upp modellen. (1p)

b) Man vill använda Bendersdekomposition för att lösa problemet. Formulera sub- och masterproblem för detta problem, med $u^{(l)}$ som funna duallösningar till subproblemet. Beskriv kortfattat lösningsmetodiken, samt vilka övre och undre gränser som fås. (1p)

c) Lös problemet till optimalitet med Bendersdekomposition. Börja med att lösa subproblemet utan solceller. Konstruera sedan det första Benderssnittet och sätt upp masterproblemet, och lös det på enklaste sätt. Lös sedan subproblemet i den erhållna punkten. Fortsätt iterera tills optimum nåtts. Ange i varje iteration bästa övre och undre gränser. Ange fullständig optimallösning.

Ledning: Subproblemet är ett kontinuerligt kappsäcksproblem, som kan lösas med metoden på sida 147 i boken (för maxproblem). För att få den duala lösningen, börjar man med att sätta dualvariabeln u_j till noll för varje bivillkor $x_j \leq 1$ som inte är aktivt. Därefter sätts dualvariabeln för kappsäcksvillkoret, u_0, till max av $q_j = c_j/a_j$ för de j som har $x_j < 1$. Slutligen sätts $u_j = c_j - a_j u_0$ för de j som har $x_j = 1$. (4p)

Uppgift 5

a) Förklara varför Dantzig-Wolfedekomposition alltid finner exakt optimum på ett ändligt antal iterationer. (1p)

b) Förklara varför Bendersdekomposition alltid finner exakt optimum på ett ändligt antal iterationer. (1p)

c) Varför kan man inte lösa ett rent heltalsproblem med Bendersdekomposition? (1p)

d) Varför kan man inte lösa ett blandat heltalsproblem med Dantzig-Wolfe-dekomposition? (1p)

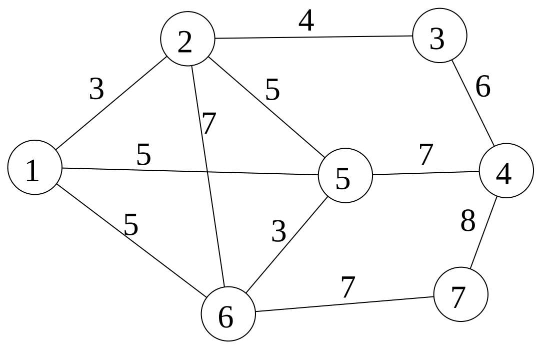
Uppgift 6

Ett oväntat kraftigt snöfall ställer till det för familjen Myseson. Garageinfarten och gångvägarna från bostadshuset till garaget och till jordkällaren snöar totalt igen och måste skottas fria. Samtliga bågar i följande graf måste skottas. Familjen har tre personer som är kapabla att skotta snö. Dessa personer kräver dock monetär ersättning för att ställa upp, och frågan är hur många det vore optimalt att anlita. Alla skottningsturer ska vara rundturer som startar och slutar i samma nod.

Varje skottande person kostar 10, oavsett hur mycket den skottar. På varje båge i grafen står tiden det tar att röja den i minuter. Man vill dels att snöröjningen ska vara färdig så tidigt som möjligt, men har också en kostnad för att jobba, som är proportionell mot den totala längden en person går. Vi antar här att en minut motsvarar en enhets kostnad.

Tiden för snöröjningen är maximum av tiderna för personerna, och man använder lika vikter, dvs. målfunktionsvärdet för en lösning är summan av tiden och kostnaden. Man antar att personerna går med konstant hastighet oavsett om de skottar eller ej.

Ledning: Ett lantbrevbärarproblem kan lösas på ungefär samma sätt som ett kinesiskt brevbärarproblem: förbind noder med udda valens på billigaste sätt för att se vilka bågar man ska lägga till (dvs. köra en extra gång).



a) Lös kinesiska brevbärarproblemet och beräkna kostnad, tid och målfunktionsvärde för en person. (1p)

b) Gör en smart uppdelning av bågarna mellan två personer, lös två lantbrevbärarproblem och beräkna total kostnad, tid och målfunktionsvärde för två personer. (2p)

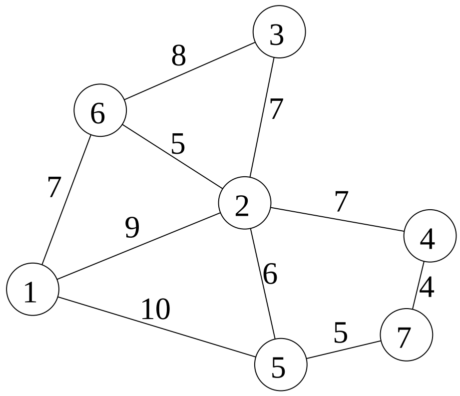
c) Gör en smart uppdelning av bågarna mellan tre personer, lös tre lantbrevbärarproblem och beräkna total kostnad, tid och målfunktionsvärde för tre personer. (2p)

d) Vilket antal personer blir bäst? (1p)

e) Interfamiljära förhandlingar resulterar i att det fasta priset för en person är förhandlingsbart. Ange intervall för den fasta kostnaden för att två personer ska ge den bästa lösningen. Använd så mycket som möjligt av lösningsgången i de tidigare uppgifterna. (1p)

Uppgift 7

Pappa Myseson tröttnar på att behöva gå ut för att tända och släcka utebelysningen. Istället vill han koppla ihop alla enheterna i ett träd av ledningar, med en gemensam på-av kontakt. Se följande graf, där bågarna är märkta med kostnad för att installera ledning. Dock vill han inte att för många förbindelser ska gå via nod 2. Därför kräver han att nod 2 ska högst ha valens två. Han vill hitta den billigaste tillåtna lösningen, och får alltså ett billigaste uppspännande trädproblem med ett extra bivillkor.



a) Formulera det extra bivillkoret, och formulera Lagrangerelaxationen där det extra bivillkoret relaxeras. (1p)

b) Lös subproblemet (med Kruskals eller Prims metod) för $u = 0$, 1, 2 och 3. Ange för varje u-punkt med hjälp av en subgradient om u bör ökas eller minskas. Ange bästa erhållna övre och undre gränser på det optimala målfunktionsvärdet, samt den bästa tillåtna lösning som fås (om någon sådan fås). (3p)

c) Antag att man har löst subproblemet för ett visst u, och att lösningen inte är tillåten. Hur kan man beräkna hur mycket man måste öka u för att lösningen ska ändras? Ledning: Ändringen i lösningen som kommer att ske är att en båge i en cykel som går genom noden med för hög valens byts mot en annan båge i samma cykel. Är det smart beräkningsmässigt att utnyttja detta? (2p)