Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP61/TEN1
OPTIMERING AV REALISTISKA SAMMANSATTA SYSTEM

Datum:	10 januari 2024
Tid:	8.00-13.00
Hjälpmedel:	Miniräknare
	Kurslitteraturen: Kaj Holmberg: *Optimering*
	Kaj Holmberg: Introduktion till matematiska dekompositionsmetoder
	Anteckningar i böckerna får förekomma.
Antal uppgifter:	7
Antal sidor:	6
	Uppgifterna är *inte* ordnade efter svårighetsgrad.
	Totalt antal poäng är 40. För godkänt krävs 16 poäng.
Examinator:	Kaj Holmberg
Jourhavande lärare:	Kaj Holmberg, tel 013-282867

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa dina beräkningar och din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden du gör.
Använd de standardmetoder som ingår i kursen.

Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla endast en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget vilka uppgifter du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.

Uppgift 1

Bertil von Bond ska sälja några jordbruksmaskiner. Han ska snart gå i pension och behöver lite extra inkomst. En köpare i Gladsaxe i Danmark har lagt bud på några av maskinerna, och Bertil har lovat att sköta transporten dit. Han har en lastbil som kan ta max 20 ton last. De kommer helt enkelt överens om att Bertil ska köra dit så mycket han kan, dansken köper det och struntar i resten av maskinerna. Det betyder att Bertil kan välja ut vilka saker han ska ta med, och han vill naturligtvis maximera sin förtjänst.

Bertil har följande maskiner, som dansken är villig att köpa, med följande ungefärliga vikter: traktor 8 ton, plog 2 ton, harv 2 ton, såmaskin 4 ton tröska 10 ton, gödselspridare 6 ton. Allt detta väger 32 ton, så Bertil kan inte ta med sig allt.

Han funderar på att använda Dynamisk Programmering, och dividerar alla koefficienter med 2 (för att minska antalet tillstånd). Med denna omskalning kan lastbilen ta max 10 viktenheter. Han får då följande tabell, där han också har lagt till vinsten varje maskin skulle ge.

Sak	Vikt (2 ton)	Vinst (10000 kr)
Traktor	4	6
Plog	1	2
Harv	1	1
Såmaskin	2	3
Tröska	5	8
Gödselspridare	3	5

a) Formulera optimeringsproblemet att välja vilka maskiner han ska ta med, så att han maximerar värdet av det medtagna, som ett linjärt heltalsproblem, med variabeldefinition, bivillkor och målfunktion. (1p)

b) Ange alla nödvändiga definitioner för att lösa problemet med dynamisk programmering. (1p)

c) Lös problemet med dynamisk programmering. Ange svar. (3p)

d) För att ha lite extra marginal, kan han bestämma att inte lasta mer än 9 viktenheter (18 ton) på bilen. Utnyttja lösningen i uppgift c för att ta fram vilken lösning som då är optimal, och vilket målfunktionsvärde man får. Ska man göra så, om man accepterar en försämring av målfunktionsvärdet med 2, men inte mer? (1p)

Uppgift 2

Betrakta optimeringsproblemet i uppgift 1a, som löstes i uppgift 1c (utan modifieringen i uppgift 1d). Tips: Gör om till min-problem.

a) Applicera Lagrangerelaxation på problemet, med multiplikatorerna u för viktbivillkoret. Ange hur subproblemet löses, samt hur man får subgradienter till den duala funktionen. (2p)

b) Lös subproblemet för $u = 0.5$, $u = 1$ och $u = 2$. Beräkna subgradient, undre gräns och ev. övre gräns i varje punkt. Ange de bästa övre och undre gränserna som fås. Vet man huruvida optimum har uppnåtts? (Information från lösningen i uppgift 1 får inte användas.) (3p)

c) Försök genom att studera Lagrangerelaxationen finna något värde på u som gör att den bästa tillåtna lösningen i uppgift 1 är optimal i subproblemet, eller visa att något sådant u ej finns. (1p)

Uppgift 3

Betrakta LP-relaxationen av problemet i uppgift 2, dvs. där $0 \leq x \leq 1$.

a) Antag att problemet ska lösas med Dantzig-Wolfedekomposition (med samma relaxation som i uppgift 2). Formulera sub- och masterproblem för detta problem, med $x^{(l)}$ som funna subproblemlösningar. Beskriv kortfattat lösningsmetodiken, samt vilka övre och undre gränser som fås. (1p)

b) Beräkna Dantzig-Wolfesnitten som fås av subproblemlösningarna som erhölls i uppgift 2. Sätt upp masterproblemet med aktuella siffror. Rita upp snitten. Lös masterproblemet grafiskt. Beräkna målfunktionsvärdet i denna punkt och ange de bästa övre och undre gränserna, samt ange vilka snitt som är aktiva.

Fortsätt att iterera på detta sätt mellan subproblem och masterproblem och generera nya snitt, tills problemet är löst till optimalitet.

Använd komplementaritet och beräkna den duala/primala lösningen (λ) till masterproblemet och beräkna motsvarande konvexkombination av subproblemlösningar. Jämför lösningen med den optimala LP-lösningen (som kan fås med en girig metod i boken). (4p)

Uppgift 4

Bertils dotter Bodil von Bond erbjuder sig att köra en extra bil med last. Hon har dock inte körkort för stora lastbilar, utan kan välja på två mindre bilar. Dessutom vill hon ha ersättning för besväret i form av danskt godis och dansk öl.

Det finns alltså tre möjligheter:
1. Bodil kör ingen bil. Kostnad 0.
2. Bodil kör den mindre bilen. Den kan ta 6 ton (dvs. 3 viktsenheter), och medför en kostnad på 4.
3. Bodil kör den något större bilen. Den kan ta 10 ton (dvs. 5 viktsenheter), och medför en kostnad på 8.

Detta kan modelleras med två binära variabler y_1 och y_2, där $y_1 = 1$ om Bodil kör den mindre bilen och $y_2 = 1$ om Bodil kör den större bilen, med bivillkoret $y_1 + y_2 \leq 1$.

a) Modifiera optimeringsmodellen i uppgift 1a (eller snarare uppgift 3, dvs. som minproblem, utan heltalskrav på x) genom att lägga till dessa variabler, och skriv upp modellen. (1p)

b) Man vill använda Bendersdekomposition för att lösa problemet. Formulera sub- och masterproblem för detta problem, med $u^{(l)}$ som funna duallösningar till subproblemet. Beskriv kortfattat lösningsmetodiken, samt vilka övre och undre gränser som fås. (1p)

c) Lös problemet till optimalitet med Bendersdekomposition. Börja med att lösa subproblemet utan Bodils hjälp. Konstruera sedan det första Benderssnittet och sätt upp masterproblemet, och lös det på enklaste sätt. Lös sedan subproblemet i den erhållna punkten. Fortsätt iterera tills optimum nåtts. Ange i varje iteration bästa övre och undre gränser. Ange fullständig optimallösning.

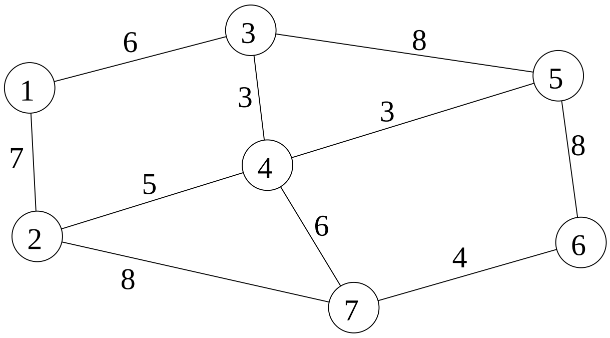
Ledning: Subproblemet är ett kontinuerligt kappsäcksproblem, som kan lösas med metoden på sida 147 i boken (för maxproblem). För att få den duala lösningen, börjar man med att sätta dualvariabeln u_j till noll för varje bivillkor $x_j \leq 1$ som inte är aktivt. Därefter sätts dualvariabeln för kappsäcksvillkoret, u_0, till max av $q_j = c_j/a_j$ för de j som har $x_j < 1$. Slutligen sätts $u_j = c_j - a_j u_0$ för de j som har $x_j = 1$.

Masterproblem får lösas med fullständig uppräkning av de tillåtna heltalslösningarna (0,0), (1,0) och (0,1). (4p)

Uppgift 5

Familjen Bond (Bertil, hans fru Barbie och dottern Bodil) ska undersöka staketen man har på sin egendom för att kontrollera att de är hela. Det ryktas att varg har synts i området. Deras granne Blofeldt vill organisera jakt och skjuta alla vargar man finner. Familjen von Bond anser dock att vargar ska få finnas, bara de inte kalasar på familjens djur.

Undersökningen måste ske till fots, och Bertil kan göra det själv, be Barbie om hjälp, eller be både Barbie och Bodil om hjälp. Bågarna i följande graf indikerar staket som måste undersökas.



Staketet ska alltså undersökas av en, två eller tre personer (rundturer). Varje rundtur kan starta i valfri nod, men ska sluta i samma nod som man startade i.

På varje båge i grafen står längden i meter. Man räknar med att undersökningen i medel tar en sekund per meter. Man räknar också med en kostnad på en krona per meter. Om Barbie ska ställa upp, måste Bertil muta henne med ett glas vin, som kostar 30 kronor. Om Bodil ska ställa upp, krävs en godispåse som kostar 20 kronor. Den fasta kostnaden är alltså noll för en person, 30 för två personer, och 50 för tre. Målet är att den totala kostnaden ska minimeras.

Tiden för undersökningen är maximum av tiderna för personerna, och man använder lika vikter, dvs. målfunktionsvärdet för en lösning är summan av tiden och kostnaden.

Ledning: Detta lantbrevbärarproblem kan lösas på ungefär samma sätt som ett kinesiskt brevbärarproblem: förbind noder med udda valens på billigaste sätt för att se vilka bågar man ska lägga till (dvs. köra en extra gång).

a) Lös kinesiska brevbärarproblemet och beräkna kostnad, tid och målfunktionsvärde för en person. (1p)

b) Gör en smart uppdelning av bågarna mellan två personer, lös två lantbrevbärarproblem och beräkna total kostnad, tid och målfunktionsvärde för två personer. (2p)

c) Gör en smart uppdelning av bågarna mellan tre personer, lös tre lantbrevbärarproblem och beräkna total kostnad, tid och målfunktionsvärde för tre personer. (2p)

d) Vilket antal personer/rundturer blir bäst? (1p)

e) Bertil tycker att det känns bäst om alla i familjen deltar i arbetet. För vilka värden på kostnaden för godispåsen är tre personer optimalt i modellen? Använd så mycket som möjligt av lösningsgången i de tidigare uppgifterna. (1p)

Uppgift 6

Det visar sig att staketet i uppgift 5 är extra känsligt i noderna i grafen, dvs. där flera staket möts. Dessa punkter måste undersökas oftare. För att underlätta detta vill man se till att det går en väg längs vissa staket, farbar med cykel, så att man med cykel kan nå samtliga noder. Man kräver inte en rundtur, utan ett uppspännande träd räcker. Bågmärkningarna i föregående uppgift ska användas som kostnad.

Vid nod 4 ligger gödselhögen, och den vill inte passera för många gånger. Därför vill man att nod 4 ska ha valens ett. Man vill minimera kostnaden, och får ett billigaste uppspännande trädproblem med ett extra bivillkor.

a) Formulera det extra bivillkoret, och formulera Lagrangerelaxationen där det extra bivillkoret relaxeras. (1p)

b) Lös subproblemet (med Kruskals eller Prims metod) för $u = 0$, 1, 2 och 3. Ange för varje u-punkt med hjälp av en subgradient om u bör ökas eller minskas. Ange bästa erhållna övre och undre gränser på det optimala målfunktionsvärdet, samt den bästa tillåtna lösning som fås (om någon sådan fås). (4p)

Uppgift 7

a) Förklara varför Dantzig-Wolfedekomposition alltid finner exakt optimum för ett LP-problem på ett ändligt antal iterationer. (1p)

b) Förklara varför Bendersdekomposition alltid finner exakt optimum för ett linjärt blandat heltalsproblem på ett ändligt antal iterationer. (1p)

c) Varför kan man inte lösa ett rent heltalsproblem med Bendersdekomposition? (1p)

d) Varför kan man inte lösa ett blandat heltalsproblem med Dantzig-Wolfedekomposition? (1p)

e) Varför kan man inte vara säker på att Lagrangerelaxation med subgradientoptimering ger korrekt primal optimallösning? (1p)