Tekniska Högskolan i Linköping
Matematiska Institutionen
Optimeringslära
Kaj Holmberg

TAOP88
Lösning till tentamen
2024-03-20

Lösningar

Uppgift 1

1a: Starta med slackvariablerna som basvariabler.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\hat{b}$
z	1	-5	-7	-8	-8	0	0	0	0
x_5	0	6	8	6	5	1	0	0	60
x_6	0	6	0	4	0	0	1	0	60
x_7	0	0	1	0	5	0	0	1	40

Först fås x_3 som inkommande variabel och x_5 som utgående.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\hat{b}$
z	1	3	11/3	0	-4/3	4/3	0	0	80
x_3	0	1	4/3	1	5/6	1/6	0	0	10
x_6	0	2	-16/3	0	-10/3	-2/3	1	0	20
x_7	0	0	1	0	5	0	0	1	40

Därefter fås x_4 som inkommande variabel och x_7 som utgående.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\hat{b}$
z	1	3	59/15	0	0	4/3	0	4/15	$272/3 \approx 90.667$
x_3	0	1	7/6	1	0	1/6	0	-1/6	$10/3 \approx 3.333$
x_6	0	2	-14/3	0	0	-2/3	1	2/3	$140/3 \approx 46.667$
x_4	0	0	1/5	0	1	0	0	1/5	8

Nu är tablån optimal. Optimallösningen blir $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 4/3 \approx 3.333$, $x_4 = 8$, samt $x_5 = 0$, $x_6 = 140/3 \approx 46.667$, $x_7 = 0$, med $z = 272/3 \approx 90.667$.

Bivillkor 1 och 3 är aktiva, eftersom slackvariablerna är noll. Duallösningen läses av i målfunktionsraden under startbasvariablerna, $y_1 = 4/3 \approx 1.333$, $y_2 = 0$, $y_3 = 4/15 \approx 0.267$, $v = 272/3 \approx 90.667$.

Svar i ord: Hon ska göra 3.333 satser av brödsort 3 och 8 satser av brödsort 4. Vinsten blir 90.667. Bivillkor 1 och 3 är aktiva, så hon använder allt vetemjöl och grahamsmjöl, men det blir en del (ganska mycket) rågsikt över.

1b: Duallösningen är skuggpriser, och y_1 är störst, så mer vetemjöl vore mest värdefullt.

1c: Ny variabel x_8. Reducerad kostnad: $\hat{c}_8 = c_8 - a_8^T y = c_8 - (4,4,4)^T(4/3, 0, 4/15) = c_8 - (16/3 + 16/15) = c_8 - 32/5 > 0$ om $c_8 > 6.4$.
Svar: Om vinsten är större än 6.4 per sats så lönar det sig att tillverka Brors special.

Uppgift 2

2a: Basbågarna blir (1,2), (1,4), (1,5), (2,3), (4,7) samt (5,6). Detta ger nodpriserna $y_1 = 0$, $y_2 = 10$, $y_3 = 22$, $y_4 = 14$, $y_5 = 9$, $y_6 = 22$, $y_7 = 44$, samt reducerade kostnaderna $\hat{c}_{24} = 7 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{37} = -13 < 0$ (ej optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{43} = 2 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{46} = 0$ (optimalt), $\hat{c}_{54} = 7 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{67} = -12 < 0$ (ej optimalt ty $x = 0$). Välj x_{37} som inkommande, att öka. Cykeln blir 3-7-4-1-2-3, och maximal ändring blir 3. Det ger (t.ex.) båge (1,2) som utgående.

Nodpriserna blir nu $y_1 = 0$, $y_2 = 23$, $y_3 = 35$, $y_4 = 14$, $y_5 = 9$, $y_6 = 22$, $y_7 = 44$, samt reducerade kostnaderna $\hat{c}_{12} = -13 < 0$ (optimalt ty $x = u$), $\hat{c}_{24} = 30 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{43} = -11 < 0$ (ej optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{46} = 0$ (optimalt), $\hat{c}_{54} = 7 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{67} = -12 < 0$ (ej optimalt ty $x = 0$). Välj x_{67} som inkommande, att öka. Cykeln blir 6-7-4-1-5-6, och maximal ändring blir 3. Det ger (t.ex.) båge (4,7) som utgående.

Nodpriserna blir nu $y_1 = 0$, $y_2 = 11$, $y_3 = 23$, $y_4 = 14$, $y_5 = 9$, $y_6 = 22$, $y_7 = 32$, samt reducerade kostnaderna $\hat{c}_{12} = -1 < 0$ (optimalt ty $x = u$), $\hat{c}_{24} = 8 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{43} = 1 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{46} = 0$ (optimalt), $\hat{c}_{54} = 7 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{47} = 12 > 0$ (optimalt ty $x = 0$).

Alla optimalitetsvillkor är uppfyllda, så lösningen är optimal. Skicka 7 lådor 1-2-3 och låt 3 av dem fortsätta till 7. Skicka 7 lådor 1-5-6 och låt 3 av dem fortsätta till 7.

2b: Skillnaden mellan nodpriserna $y_7 = 32$ och $y_5 = 9$ är 23, så för $c_{57} < 23$ skulle den vägen kunna göra lösningen bättre.

2c: Finn maxflöde från nod 1 till nod 7. Starta med flöde noll.

Sök maximal flödesökande väg med Dijkstras metod. Vi får (t.ex.) vägen 1-4-7, med kapacitet 7. Skicka 7 enheter och ändra tillåtna riktningar. (Bågarna (1,4) och (4,7) blir fulla.)

Sök åter maximal flödesökande väg med Dijkstras metod. Vi får vägen (t.ex.) 1-2-3-7, med kapacitet 7. Skicka 7 enheter och ändra tillåtna riktningar. (Alla bågar i vägen blir fulla.)

Sök åter maximal flödesökande väg med Dijkstras metod. Vi får vägen 1-5-4-6-7, med kapacitet 7. Skicka 7 enheter och ändra tillåtna riktningar. (Alla bågar i vägen blir fulla.)

Sök åter maximal flödesökande väg med Dijkstras metod. Vi kan nu bara märka nod 1, så minsnittet går över bågarna (1,2), (1,4) och (1,5). Maxflödet är 21.

Uppgift 3

3a: Skriv problemet på standardform för att applicera KKT-villkoren.
$g_1(x) = -x_1 \leq 0$, $g_2(x) = -x_2 \leq 0$, $g_3(x) = x_1 - 5 \leq 0$, $g_4(x) = x_2 - 4 \leq 0$, $g_5(x) = x_1 + x_2 - 6 \leq 0$, $\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 6x_1 - 25 \\ 10x_2 - 40 \end{pmatrix}$, $\nabla g_1(x) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\nabla g_2(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$,

$\nabla g_3(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\nabla g_4(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\nabla g_5(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Vi struntar i alla punkter där $x_2 = 0$. Kvar är (5, 1), (2, 4) och (0, 4).

För punkt (5, 1):
KKT1: Punkten är tillåten.
KKT2: Bivillkor 1, 2 och 4 är inte aktiva, så $u_1 = 0$, $u_2 = 0$ och $u_4 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} 5 \\ -30 \end{pmatrix} + u_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u_5 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Detta ger $u_3 = -35$ och $u_5 = 30$. KKT4 är inte uppfyllt. Punkten är inte en KKT-punkt.

För punkt (2, 4):
KKT1: Punkten är tillåten.
KKT2: Bivillkor 1, 2 och 3 är inte aktiva, så $u_1 = 0$, $u_2 = 0$ och $u_3 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} -13 \\ 0 \end{pmatrix} + u_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + u_5 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Detta ger $u_4 = -13$ och $u_5 = 13$. KKT4 är inte uppfyllt. Punkten är inte en KKT-punkt.

För punkt (0, 4):
KKT1: Punkten är tillåten.
KKT2: Bivillkor 2, 3 och 5 är inte aktiva, så $u_2 = 0$, $u_4 = 0$ och $u_5 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} -25 \\ 0 \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + u_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Detta ger $u_1 = -25$ och $u_4 = 0$. KKT4 är inte uppfyllt. Punkten är inte en KKT-punkt.

Alla bivillkor är linjära, så det tillåtna området är konvext. Målfunktionen är konvex, så hela problemet är konvext. KKT-villkoren visar då att ingen av dessa punkter är optimal.

3b: I startpunkten är bara ickenegativitetsvillkoren aktiva. Första LP-problemet blir
$\min z = -25d_1 - 40d_2$ då $0 \leq d \leq 1$,
vilket har optimallösning $d = (1, 1)$ med $z = -65$. Sätt $x^{(2)} = (t, t)$. Maximal steglängd blir 3. Mimimum längs denna linje ger $t = 65/15 = 4.0625$, så vi får $t = 3$, vilket ger $x^{(2)} = (3, 3)$.

Nu är bara bivillkor 3 aktivt. LP-problemet blir
$\min z = -7d_1 - 10d_2$ då $d_1 + d_2 \leq 0$, samt $-1 \leq d \leq 1$,
vilket har optimallösning $d = (-1, 1)$ med $z = -3$. Sätt $x^{(2)} = (3 - t, 3 + t)$. Maximal steglängd blir 1. Mimimum längs denna linje ger $t = 3/16 = 0.1875$, så vi får $t = 3/16$, vilket ger $x^{(3)} = (45/16, 51/16) = (2.8125, 3.1875)$.

Nu är bivillkor 3 aktivt. LP-problemet blir
$\min z = -65/8d_1 - 65/8d_2 = -8.125d_1 - 8.125d_2$ då $d_1 + d_2 \leq 0$, samt $-1 \leq d \leq 1$,
vilket har optimallösning bl.a. $d = (0, 0)$ med $z = 0$. Alltså är punkten $x = (2.8125, 3.1875)$ optimal, med målfunktionsvärde ungefär -123.28.

3c: Lagrangerelaxationen:
$\varphi(u) = \min_{0\le x_1\le 5, 0\le x_2\le 4} 3x_1^2 + 5x_2^2 - 25x_1 - 40x_2 + u(x_1 + x_2 - 6) = 3x_1^2 + 5x_2^2 + (u - 25)x_1 + (u - 40)x_2 - 6u$.

Minimum kan fås genom att sätta gradienten av Lagrangefunktionen lika med noll, vilket ger $6x_1 + u - 25 = 0$ och $10x_2 + u - 40 = 0$, dvs. $x_1 = (25 - u)/6$ och $x_2 = (40 - u)/10$, förutsatt att dessa punkter ligger i det tillåtna området $0 \le x_1 \le 5$ och $0 \le x_2 \le 4$. Annars hamnar man på närmaste gräns.

För $u = 0$ får vi $x_1 = 25/6 = 4\ 1/6$ och $x_2 = 4$, med $\varphi(0) = -1585/12 \approx -132.0833$. Undre gräns: -132.0833. Punkten är inte tillåten, så vi får ingen övre gräns.

För $u = 8$ får vi $x_1 = 17/6 \approx 2.833$ och $x_2 = 3.2$, med $\varphi(8) \approx -123,2833$. Undre gräns ökar till -123.2833. Punkten är inte riktigt tillåten, eftersom $x_1 + x_2 \approx 6.0333 > 6$, så ingen övre gräns fås.

För $u = 10$ får vi $x_1 = 2.5$ och $x_2 = 3$, med $\varphi(10) = -123.75$. Undre gräns ökar inte. Punkten är tillåten, och ger övre gräns -118.75.

Vi får bästa undre gräns -123.2833 och övre gräns -118.75. och den bästa lösningen är $(2.5, 3)$, ej säkert optimal. Optimalt värde på u ligger mellan 8 och 10.

3d: Antag först att $x_1 = (25 - u)/6$ och $x_2 = (40 - u)/10$. (Om det skulle ge något x utanför gränserna så är antagandet felaktigt.)

Då blir $x_1 + x_2 = (25 - u)/6 + (40 - u)/10 = 25/6 - u/6 + 4 - u/10 = 49/6 - 4u/15$. Villkoret $x_1 + x_2 = 6$ blir då $49/6 - 4u/15 = 6$, vilket ger $u = 65/8 = 8.125$.

Kontroll: $u = 65/8 = 8.125$ ger $x_1 = (25 - u)/6 = 45/16 = 2.8125$ och $x_2 = (40 - u)/10 = 51/16 = 3.1875$. Vi ser att dessa värden ligger i de tillåtna intervallen, och att $x_1 + x_2 = 45/16 + 51/16 = 96/126 = 6$.

Svar: $u = 8.125$.

Uppgift 4

4a: Det är ett handelsresandeproblem. Undre gräns hittas med billigaste 1-träd, kostnad 39. En heuristik kan ge turen 1-2-3-6-7-4-5-1, med kostnaden 42. eller 1-2-4-3-6-7-5-1, med kostnaden 40. Vi får alltså undre gräns 39, och övre 42 (eller 40). Lösningen är alltså maximalt 3 (eller 1) dyrare än optimum.

4b: Man måste då gå direkt från nod 7 till nod 1. Det enklaste sättet att uppnå detta är att lägga till en direktbåge från nod 7 till nod 1 med kostnad noll. Då fås turen 1-5-4-2-3-6-7-1. Kostnaden för detta, 37, är inte korrekt, eftersom det inte kostar noll att gå från 7 till 1, utan 10 (vägen 7-5-1).

4c: Det är ett kinesiskt brevbärarproblem: Finns billigaste rundtur som passerar varje båge minst en gång.

Noderna 5 och 7 har udda valens. De gator som ska köras mer än en gång ska öka valensen med ett för dessa noder. Det billigaste sättet att uppnå detta är med di-

rektbågen (5,7), med kostnad 6. Vi löser nu problemet genom att dubblera denna båge, och hitta en Eulertur i denna graf. Kostnaden för turen blir 81. En optimal tur är t.ex. 1-2-8-3-2-4-3-6-7-4-5-7-5-1. (Flera optimala turer finns.)

Uppgift 5

Detta är ett tillordningsproblem. Lös med ungerska metoden.

Efter första steget fås $\alpha = (5, 6, 6, 3, 4)$ och $\beta = (0, 0, 1, 0, 1)$. Man kan stryka alla nollor genom att stryka rad 1, 2 och 4 samt kolumn 2. Minsta ostrukna element är 1. Vi får nu $\alpha = (5, 6, 7, 3, 5)$ och $\beta = (0, -1, 1, 0, 1)$.

Nu kan man stryka alla nollor genom att stryka rad 2 och 4 samt kolumn 2 och 4. Minsta ostrukna element är 1. Vi får nu $\alpha = (6, 6, 8, 3, 6)$ och $\beta = (0, -2, 1, -1, 1)$.

Nu kan man inte stryka alla nollor med färre än fem streck, och får lösningen $x_{14} = 1$, $x_{21} = 1$, $x_{33} = 1$, $x_{45} = 1$, $x_{52} = 1$, och total kostnad blir 28. Optimal duallösning är $\alpha = (6, 6, 8, 3, 6)$ och $\beta = (0, -2, 1, -1, 1)$. Summering av duallösningen ger 28, så starka dualsatsen är uppfylld.

Uppgift 6

Variabeldefinition: $x_j = 1$ om uppläggningsplats j används, 0 om inte.
Målfunktion: Minimera kostnaden: min $5x_1 + 7x_2 + 8x_3 + 10x_4 + 6x_5$
Bivillkor:
Total kapacitet: $25x_1 + 20x_2 + 30x_3 + 40x_4 + 25x_5 \geq 100$
Begränsningar: $x_3 \leq 1 - x_1$, $x_4 \geq x_2$

Modell:

$$
\begin{array}{llrrrrrcrr}
\min & z = & 5x_1 & +7x_2 & +8x_3 & +10x_4 & +6x_5 & & & \\
\text{då} & & 25x_1 & +20x_2 & +30x_3 & +40x_4 & +25x_5 & \geq & 100 & (1) \\
 & & x_1 & & +x_3 & & & \leq & 1 & (2) \\
 & & & x_2 & & -x_4 & & \leq & 0 & (3) \\
 & & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \in & 0,1 &
\end{array}
$$

Vi har ingen tillåten lösning, så vi kräver bara $z \leq 36$ (vilket är redundant).
Balas metod:
$VL_0 = 5x_1 + 7x_2 + 8x_3 + 10x_4 + 6x_5 - 36 \leq 0$
$VL_1 = -25x_1 - 20x_2 - 30x_3 - 40x_4 - 25x_5 + 100 \leq 0$
$VL_2 = x_1 + x_3 - 1 \leq 0$
$VL_3 = x_2 - x_4 \leq 0$

Först fås inga fixeringar, så vi förgrenar över x_1.
P1 = P0 +($x_1 = 1$). P2 = P0 +($x_1 = 0$).

P1 ($x_1 = 1$): $\underline{VL}_2 = 0$, så vi måste fixera $x_3 = 0$.
Vi får inga fler fixeringar, så vi förgrenar över x_2.
P3 = P1 +($x_2 = 1$). P4 = P1 +($x_2 = 0$).

P3 ($x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$): $\underline{VL}_1 = -10$, så vi måste fixera $x_4 = 1$.

Av samma skäl måste vi fixera $x_5 = 1$.

Nu är allt fixerat ($x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$, $x_5 = 1$), så vi kollar alla bivillkor en gång till. Lösningen är tillåten, så vi noterar lösningen $x = (1, 1, 0, 1, 1)$ med $z = 28$ som kandidatlösning, kapar grenen, och uppdaterar målfunktionsbivillkoret genom att kräva $z \leq 27$, dvs.: $VL_0 = 5x_1 + 7x_2 + 8x_3 + 10x_4 + 6x_5 - 27 \leq 0$

Vi går nu till: P4 ($x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$): $\underline{VL}_0 = 10 > 0$, så vi kapar grenen.

P2 ($x_1 = 0$): $\underline{VL}_1 = -15$, så vi måste fixera $x_2 = 1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 1$ och $x_5 = 1$.
$\underline{VL}_0 = 4 > 0$, så vi måste kapa grenen.

Alla grenar är nu avsökta, och problemet löst. Den senaste (enda) noterade lösningen är optimal: $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$, $x_5 = 1$, med $z = 28$. Svar i ord: Använd uppläggningsplatserna 1, 2, 4 och 5.

Uppgift 7

P0: LP-optimum: $x_1 = 8.75$, $x_2 = 0$, $z = 43.75$. Detta ger $\bar{z} = 43$.

Förgrena över x_1. P1 = P0 +($x_1 \leq 8$). P2 = P0 +($x_1 \geq 9$).

P1: LP-optimum: $x_1 = 8$, $x_2 = 0.375$, $z = 42.625$, vilket ger $\bar{z} = 42$.

Förgrena över x_2. P3 = P1 +($x_2 \leq 0$). P4 = P1 +($x_2 \geq 1$).

P3: LP-optimum: $x_1 = 8$, $x_2 = 0$, $z = 40$, vilket är en tillåten heltalslösning, och ger $\underline{z} = 40$. Kapa grenen.

P4: LP-optimum: $x_1 = 6.75$, $x_2 = 1$, $z = 40.75$, vilket ger ger $\bar{z} = 40$. Men vi har redan $\underline{z} = 40$, så grenen kapas.

P2: Tillåten lösning saknas. Kapa

Trädet är avsökt. Optimum är $x_1 = 8$, $x_2 = 0$ med $z = 40$. I ord: Köp 8 små snöplogar.

Uppgift 8

8a: Finn billigaste väg från nod 1 till nod 9 med Dijkstras metod. Det ger följande nodmärkningar: $y = (0, 10, 14, 10, 21, 28, 20, 28, 29)$ och $p = (-, 1, 1, 1, 2, 5, 4, 7, 5)$. Billigaste väg blir 1-2-5-9 med kostnad 29.

8b: Båge (5,9) blir väldigt dyr. Den enda märkningen som påverkas av det är för nod 9, så den måste göras om. Vi får ny märkning $y_9 = 33$, och $p_9 = 8$. Vägen blir nu 1-4-7-8-9, med kostnad 33.