Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP88/TEN1
OPTIMERING FÖR INGENJÖRER

Datum:	20 mars 2023
Tid:	8.00-13.00
Hjälpmedel:	Miniräknare
	Kurslitteratur: Kaj Holmberg: *Optimering*
	Anteckningar i boken får förekomma.
Antal uppgifter:	8
Antal sidor:	7
	Uppgifterna är *inte* ordnade efter svårighetsgrad.
	Totalt antal poäng är 40. För godkänt krävs 16 poäng.
Examinator:	Kaj Holmberg
Jourhavande lärare:	Kaj Holmberg, tel 013-282867

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

<u>När Du löser uppgifterna</u>

Redovisa dina beräkningar och din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden du gör.
Använd de standardmetoder som ingår i kursen.

Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla endast en huvuduppgift på varje blad.

<u>Vid skrivningens slut</u>

Sortera dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget vilka uppgifter du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.

Uppgift 1

Lena, grundare av firma Lenas Bak, funderar på vilka bröd hon ska baka inför en kommande marknad. Hon har ett begränsat förråd av vissa mjölsorter, och vill utnyttja sina begränsade resurser så bra som möjligt. I nedanstående tabell ges de olika sorters bröd hon kan tänka sig göra och hur mycket mjöl som krävs till en sats (i dl), samt vilken vinst en sats skulle ge. Längst ner ges hur mycket mjöl som finns tillgängligt (i dl).

Brödsort	Vetemjöl	Rågsikt	Grahamsmjöl	Vinst
1	6	6	0	5
2	8	0	1	7
3	6	4	0	8
4	5	0	5	8
Tot	60	60	40	

Hon vill veta hur många satser av varje sort hon ska göra, så att total vinst maximeras. Optimeringsmodellen för detta blir följande, med variablerna x_j för hur många satser av brödsort j hon gör, och bivillkoren för de olika mjölsorterna. (Hon behöver inte nödvändigtvis göra hela antal av satserna.)

$$
\begin{array}{lrcccccccl}
\max & z = & 5x_1 & + & 7x_2 & + & 8x_3 & + & 8x_4 & & \\
\text{då} & & 6x_1 & + & 8x_2 & + & 6x_3 & + & 5x_4 & \leq 60 & (1) \\
 & & 6x_1 & & & + & 4x_3 & & & \leq 60 & (2) \\
 & & & & x_2 & & & + & 5x_4 & \leq 40 & (3) \\
 & & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4 & \geq 0 &
\end{array}
$$

a) Lös detta LP-problem med simplexmetoden. Ange optimal primallösning (även i ord) och duallösning samt målfunktionsvärde. Vilka bivillkor blir aktiva, och vad betyder det? (3p)

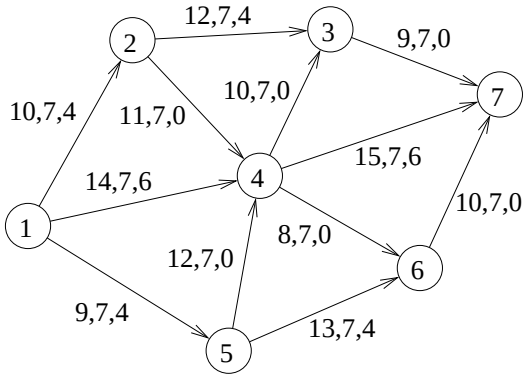
b) Utgå från optimallösningen i uppgift a. Om man kunde öka tillgänglig mängd av en mjölsort, vilken skulle man tjäna mest på? Motivera. (1p)

c) Utgå från optimallösningen i uppgift a. Lenas bror Bror tror att ett bröd med lika mycket av de tre mjölsorterna vore gott. En sats skulle då innehålla 4 dl av varje sort. Vad skulle vinsten per sats minst behöva vara för att man skulle tjäna på denna sorts bröd? (1p)

Uppgift 2

Lena lyckas få ett kontrakt med några närliggande affärer som kan sälja hennes bröd. Hon får hjälp av sin pojkvän Lasse, som har firman Lasses Bil. De skriver ett kontrakt där Lenas Bak betalar Lasses Bil en ersättning per transporterad låda baserat på kört avstånd. Eftersom Lasse är snäll vill han köra så att transporterna blir så billiga som möjligt. I nuläget har Lena 14 lådor i sitt hem i nod 1 i följande

nätverk. Beställningarna är 4 till nod 3, 4 till nod 6 och 6 till nod 7. Nätverket visar möjliga vägar, och bågarna är märkta med kostnad per låda, samt ett förslag på hur man skulle kunna köra lådorna (framtaget av bror Bror). Lasses bil tar inte mer än 7 lådor, så man använder 7 som övre gräns på flödet i alla bågar.



a) Det visar sig att vägen mellan noderna 4 och 7 har blivit betydligt sämre under vintern, och bröden riskerar att skaka sönder om man åker där. Därför vill Lasse undvika den vägen, om det är möjligt. Han ökar kostnaden på den bågen från 15 till 30, och finner en ny optimallösning. Gör detta med simplexmetoden för nätverk. Starta med Brors lösning. (3p)

b) Utgå från optimallösningen i uppgift b. Lasse funderar på att använda grusvägen som går direkt från nod 5 till nod 7, trots att bilen blir smutsig. För vilken enhetskostnad skulle totalkostnaden minska av att använda den vägen? Motivera med nodpriser. (1p)

c) Stormarknaden i nod 7 säljer mycket av Lenas bröd. Hur mycket skulle man maximalt kunna transportera från nod 1 till nod 7? I framtiden kommer bågen (5,6) inte att kunna användas på grund av vägarbete. Finn framtida maxflöde under dessa förutsättningar. Använd standardmetod och starta med flöde noll i alla bågar. Visa varje steg i metoden tydligt. Vilka bågar begränsar maxflödet? (3p)

Uppgift 3

Lena planerar att göra ett helt nytt bröd, och vill optimera ingredienserna. Speciellt tittar hon på proportionerna av vetemjöl och rågmjöl, och vill hitta den bästa smaken och konsistensen. Efter många experiment kommer hon fram till att det bästa resultatet fås av att minimera följande funktion, $f(x) = 3x_1^2 + 5x_2^2 - 25x_1 - 40x_2$, där x_1 är mängden vetemjöl och x_2 mängden rågmjöl. Bivillkoren blir $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_1 \leq 5$ och $x_2 \leq 4$, samt $x_1 + x_2 \leq 6$.

a) Hörnpunkterna i det tillåtna området är (0, 0), (5, 0), (5, 1), (2, 4) och (0, 4). Lena tycker att ett bröd utan rågmjöl vore tråkigt, Kontrollera optimalitet

för de andra punkterna med hjälp av KKT-villkoren. (3p)

b) Lös problemet med Zoutendijks metod. Starta i punkten (0, 0). Lös LP-problemen grafiskt. Illustrera varje iterationspunkt grafiskt. (Det är inte tillåtet att använda information från lösningen i uppgift a.) (3p)

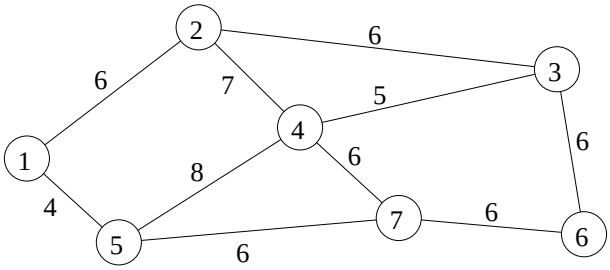
c) Applicera Lagrangerelaxation genom att relaxera bivillkoret som innehåller båda variablerna. Lös subproblemet för $u = 0$, 8 och 10. (Observera att subproblemet är separabelt.) Använd lösningarna för att avgöra/gissa var det optimala värdet för u ligger. Ange bästa erhållna övre och undre gränser för det optimala målfunktionsvärdet. (Det är inte tillåtet att använda information från lösningarna i uppgift a eller b.) (3p)

d) Betrakta uppgift c. Beräkna vilket värde på u som skulle ge likhet i det relaxerade bivillkoret. (1p)

Uppgift 4

a) Ett ymnigt senkommet snöfall sätter vårkänslorna på paus. Snöröjarna jobbar för fullt, och samlar ihop stora högar av snö på olika ställen i staden. Lasse anlitas för att köra bort snöhögarna till en plats utanför staden, där snön kan smälta i lugn och ro. Han tänker ta sin största lastbil, så att all snö får plats på flaket. Det betyder att han bara behöver köra en rundtur till alla snöhögarna och lasta på dem, och sedan köra till avstjälpningsplatsen och tippa av det där.

I följande nätverk är nod 1 Lasses garage, där lastbilen står och ska stå efteråt. Nod 7 är avstjälpningsplatsen. I de andra noderna ligger det snöhögar. Koefficienterna på bågarna anger tiden det tar att köra, och han vill helt enkelt finna den snabbaste rundturen som passerar alla noderna.

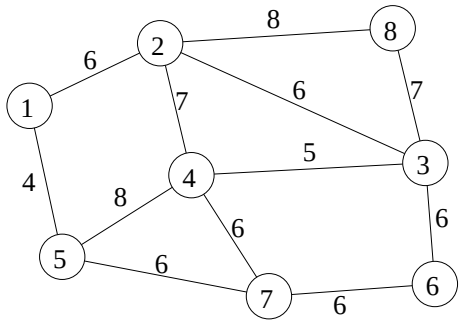


Vilket optimeringsproblem är det att finna den bästa rundturen? Finn en tillåten lösning med valfri heuristik. Beskriv heuristiken. Finn en optimistisk uppskattning av tiden för den optimala turen med hjälp av en relaxation av problemet. Ange övre och undre gräns på det optimala målfunktionsvärdet. (2p)

b) När Lasse inspekterar lösningen till problemet i uppgift a inser han att det blev lite fel. Turen ska börja och sluta i nod 1, och det går ju alltid att fixa,

eftersom turen är cyklisk. Men han måste ju besöka avstjälpningsplatsen, nod 7, efter alla de andra noderna, och direkt före nod 1, eftersom han först ska samla ihop snön, och sedan stjälpa av den, och sedan åka hem. Modifiera metoden och/eller grafen så att det blir som önskat. Lös om problemet. (2p)

c) Precis när Lasse ska åka iväg med sin lastbil, ringer hans kompis Snöröjar-Alf, och säger att en av hans röjare har blivit sjuk och inte kan röja sitt område. Skulle Lasse kunna ta det området? Alf har en plog som man kan montera på Lasses lastbil. Området som ska röjas ges i följande graf. Bågkoefficienterna anger tid det tar att köra gatan, och Lasse kör lika fort oavsett om han röjer eller ej.



Vilket optimeringsproblem är det att finn en snabbaste rundtur för Lasse? Finn en optimallösning. Beskriv stegen i metoden noggrant. Ange rundtur och total tid. (2p)

Uppgift 5

Det kommer väldigt mycket snö, så det blir mycket arbete med att flytta bort den. I ett visst läge ligger det fem stora snöhögar på olika platser i centrum. De ska flyttas en och en till fem olika platser utanför staden, där snön kan smälta utan att vara i vägen. Frågan är bara vilken snöhög som ska flyttas till vilken plats. Nedanstående matris ger kostnaden för att flytta varje hög (rad) till varje plats (kolumn), och man vill finna den tillordning som minimerar de totala kostnaderna.

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 8 & 5 & 7 \\ 6 & 7 & 7 & 6 & 8 \\ 9 & 6 & 9 & 8 & 9 \\ 8 & 3 & 8 & 7 & 4 \\ 6 & 4 & 8 & 5 & 9 \end{pmatrix}$$

Lös problemet med lämplig metod. Ange optimal lösning samt målfunktionsvärde. Ange även dual optimallösning och kontrollera starka dualsatsen. (3p)

Uppgift 6

Efter den snörika vintern behövs flera uppläggningsplatser för snö. När man lägger smutsig snö full med grus i en stor hög tar det lång tid innan den smälter, och när den smälter läcker allehanda gifter ut i naturen. Därför kan man inte lägga dessa snöhögar var som helst.

Man har hittat fem olika platser där man skulle kunna förvara snö. Varje plats har en viss kapacitet i ton, se följande tabell, och man behöver kunna lägga upp minst 100 ton totalt. Det finns också en viss kostnad för att iordningställa platserna före och efter användningen, och dessa ges i tabellen.

Plats	1	2	3	4	5
Kapacitet	25	20	30	40	25
Kostnad	5	7	8	10	6

Det finns också vissa begränsningar. Om plats 1 används, kan inte plats 3 användas. Om plats 2 används, bör också plats 4 användas.

Sätt upp en linjär optimeringsmodell med binära variabler för att finna vilka uppläggningsplatser man ska använda så att totalkostnaden minimeras. Lös problemet med Balas metod. Förgrena över den första ofixerade variabeln. Ange optimallösning i ord. (3p)

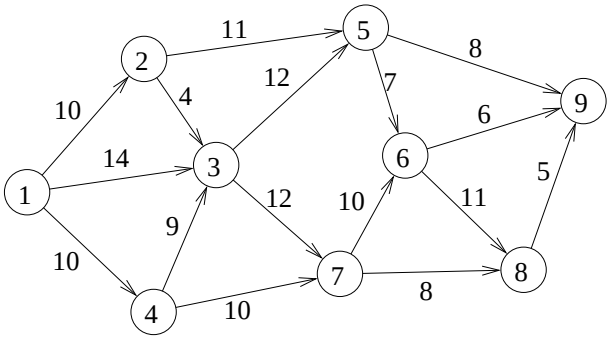
Uppgift 7

Snöröjar-Alf planerar för nästa säsong. Frågan är hur många snöplogar han ska ha. Det finns stora och små. Några är gamla och ska skrotas, så några nya måste köpas in. I nedanstående modell är x_1 antal små snöplogar som ska köpas in, och x_2 antal stora snöplogar som ska köpas in. Målfunktionen speglar förväntad nytta av dem. Bivillkoren bygger på begränsad budget, samt begränsat utrymme i lokalen där snöplogarna förvaras under sommaren. Lös problemet med Land-Doig-Dakins metod. LP-problem får lösas grafiskt. (3p)

$$
\begin{array}{lll}
\max & z = & 5x_1 + 7x_2 \\
\text{då} & & 4x_1 + 8x_2 \leq 35 \\
\text{då} & & 2x_1 + 3x_2 \leq 30 \\
 & & x_1 \geq 0, \text{heltal} \\
 & & x_2 \geq 0, \text{heltal}
\end{array}
$$

Uppgift 8

a) Det har äntligen blivit vår. Lena och Lasse har varit på ölprovning och ska nu cykla hem. När de cyklade dit åkte de en trevlig tur längs ån och avnjöt naturen. När de ska hem vill de dock ta den kortaste vägen, eftersom de räknar med att deras uthållighet har minskat av dagens aktivitet. Nedanstående nätverk visar möjliga vägar de kan använda. Nod 1 är platsen för ölprovningen och nod 9 är deras hem. Bågkoefficienterna anger avstånd. Finn, med lämplig metod, den bästa vägen. (2p)



b) Båge (5,9) är en brant nedförsbacke, och de inser att de inte vågar cykla den med omdömen grumlade av alkohol. Hur ska de cykla då? De har inte tid att göra om hela optimeringen, utan vill använda de nodmärkningar som inte påverkas av ändringen. (1p)