Tekniska Högskolan i Linköping
Matematiska Institutionen
Optimeringslära
Kaj Holmberg

Kombinatorisk optimering, miljö
Lösning till tentamen
2010-03-16

Svar och kortfattade lösningar

(Dessa lösningar kan användas för att kontrollera huruvida man har rätt svar. De är dock inte säkert tillräckligt detaljerade för att ge full poäng på tentan.)

Svar 1

a) P0 ger $x_1 = 4$, $x_2 = 1.6$ och $\bar{z} = 12$. Förgrena: P1 = P0 + $(x_2 \geq 2)$. P2 = P0 + $(x_2 \leq 1)$. P1 ger $z = 10$ och en tillåten heltalslösning, $(0, 2)$, så $\underline{z} = 10$. P2 ger $z = 9$, vilket är sämre än $\underline{z}$. Kapa grenen. Trädet avsökt. Svar: Tillverka 2 stycken Spajker Super Sport.

b) P0 ger direkt heltal, $x_1 = 20$, $x_2 = 0$ och $z = 20$. Svar: Tillverka 20 stycken Spajker SAAB.

c) Det "krångliga" bivillkoret blir det som går genom punkterna $(0, 2)$ och $(4, 1)$. Det har normalen $(1, 4)$, så bivillkoret blir $x_1 + 4x_2 \leq 8$. Konvexa höljet definieras av $x_1 \geq 8$, $x_2 \geq 0$, $x_1 \leq 4$ samt $x_1 + 4x_2 \leq 8$.

d) Starta med slackvariablerna i basen. Inkommande variabel blir först x_2 och utgående blir x_3. Sedan fås inkommande variabel x_1 och utgående x_4. Därefter fås optimum, $x_1 = 4$, $x_2 = 1.6$ och $z = 12$. Skuggpriserna läses av i optimaltablån under slackvariablerna och är $y_1 = 0.5$ och $y_2 = 0.5$. Detta betyder att en liten (ϵ) ändring av ett högerled ger ändringen 0.5ϵ i målfunktionsvärde. Detta gäller så länge optimalbasen är oförändrad.

e) LP-dual: min $20y_1 + 4y_2$ då $y_1 + y_2 \geq 1$, $10y_1 \geq 5$, $y_1 \geq 0$, $y_2 \geq 0$.

Optimum blir $y_1 = 1/2$, $y_2 = 1/2$ och $v = 12$. Båda duala bivillkoren är uppfyllda med likhet och båda primala bivillkoren är uppfyllda med likhet, så komplementaritet är uppfylld, trots att x_1, x_2, y_1 och y_2 alla är positiva.

f) För $0 \leq b_2 \leq 20$ är den optimala baslösningen oförändrad. För $0 \leq b_2 \leq 10$ är den optimala heltalslösningen oförändrad.

g) $\hat{c}_5 = c_4 - y^T a_5 = 3 - 5/2 = 1/2 > 0$, så den nya variabeln blir inkommande och optimallösningen ändras.

h) Eftersom bivillkor 2 bara innehåller x_1, kan man se resterande problem som ett kappsäcksproblem. Jämförelse mellan x_2 och x_5 ger att varje enhet av x_2 kan ersättas med två enheter av x_5, vilket ger högre vinst. Därav kan vi dra slutsatsen att $x_2 = 0$ i optimum. Så ja, optimallösningen förändras.

Svar 2

a) Man kan antingen rita upp det hela som ett nätverk och finna billigaste väg, eller använda följande definitioner. s_k = antal båtar i lager efter period k och x_k = antal båtar som produceras i period k, vilket ger överföringsfunktionen $s_{k-1} = s_k - x_k + 1$. Målfunktionen blir $f_k(s_k) = \min_{x_k}(c_p(x_k) + c_l(s_k) + f_{k-1}(s_{k-1}))$. Dessutom vet vi att $s_0 = s_4 = 0$, samt att $0 \leq s_k \leq 1$, vilket ger $0 \leq x_k \leq 2$. (Observera att $x_k = 1$ ger att vi ligger kvar på samma lagernivå.)

Optimallösningen blir att producera 2 båtar i månad 1 och 3 (och ingen i månad 2 och 4). Totalkostnaden blir 2000 tkr.

b) Man behöver bara göra om optimeringen i sista steget, dvs. bara bestämma $f_4(0)$ ($f_1(s_1)$, $f_2(s_2)$ och $f_3(s_3)$ ändras ej) samt nysta upp lösningen. Optimallösningen blir nu att producera 2 båtar i månad 1 samt en båt i månad 3 och 4 (och ingen i månad 2). Totalkostnaden blir 1900 tkr.

Svar 3

a) KKT-villkoren:
1. $2x_1^2 + x_2^2 \leq 1, x_1 + x_2 \geq 1$.
2. $u_1(2x_1^2 + x_2^2 - 1) = 0, u_2(x_1 + x_2 - 1) = 0$.
3. $\begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 - 1 \\ x_1 + 4x_2 - 1 \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} 4x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
4. $u_i \geq 0 \; \forall i$.

$(1, 0)$ är inte tillåten i bivillkor (1) och är därför inte en KKT-punkt.

$(0, 1)$ är tillåten i alla bivillkor (1) med likhet, så (2) är uppfyllda utan krav på u_1 och u_2. Ekvationssystemet (3) ger då $u_1 = -3/2$ och $u_2 = 0$. (4) är inte uppfyllt eftersom $u_1 < 0$, så $(0, 1)$ är inte en KKT-punkt.

b) Antagandet ger $u_1 = 0$, så det som återstår av (3) är $2x_1 + x_2 - 1 - u_2 = 0$ och $x_1 + 4x_2 - 1 - u_2 = 0$, vilket har lösningen $x_1 = 3(1 + u_2)/7$ och $x_2 = (1 + u_2)/7$. Antagandet säger att $x_1 + x_2 = 1$, och insättning ger $x_1 + x_2 == 4(1 + u_2)/7 = 1$, vilket ger $u_2 = 3/4$ (> 0). Detta ger $x_1 = 3/4$ och $x_2 = 1/4$. Kontroll visar att denna punkt dock *inte* är tillåten i det första bivillkoret. Slutsats: Punkten $(3/4, 1/4)$ är inte en KKT-punk, och inte optimal.

Svar 4

a) Använd Fords metod, ty en bågkostnad är negativ. Billigaste väg: 1 - 2 - 4 - 5 - 6. Kostnad: 6.

b) $\hat{c}_{25} = c_{25} + y_2 - y_5 = c_{25} + 3 - 4 = c_{25} - 1 < 0$ om $c_{25} < 1$.

c) Startbas: (1,2), (1,3), (3,5), (4,6) och (5,6). Detta ger nodpriserna (beräknade via basträdet) $y_1 = 0$, $y_2 = 3$, $y_3 = 3$, $y_5 = 5$, $y_6 = 7$ och $y_4 = 5$, vilket ger reducerade kostnaderna
$\hat{c}_{32} = c_{32} + y_3 - y_2 = 1 + 3 - 3 = 1 > 0$ (opt),
$\hat{c}_{24} = c_{24} + y_2 - y_4 = 3 + 3 - 5 = 1 > 0$ (minska),
$\hat{c}_{34} = c_{34} + y_3 - y_4 = 5 + 3 - 5 = 3 > 0$ (opt),
$\hat{c}_{45} = c_{45} + y_4 - y_5 = -2 + 5 - 5 = -2 < 0$ (öka).
Vi väljer att öka flödet i båge (4,5), eftersom det verkar bättre än att minska flödet i (2,4) ($|\hat{c}_{45}| > |\hat{c}_{24}|$). Vi får x_{45} som inkommande variabel (ökning). Cykel: 4 - 5 - 6 -

4. Kontroll av gränser: $x_{45} = \theta \leq 3$. $x_{56} = 3 + \theta \leq 4$ ger $\theta \leq 1$. $x_{46} = 3 - \theta \geq 0$ ger $\theta \leq 3$. Sätt $\theta = 1$ och välj x_{56} som utgående variabel.

Vi får nu $y_1 = 0$, $y_2 = 3$, $y_3 = 3$, $y_5 = 5$, $y_4 = 7$ och $y_6 = 9$, vilket ger reducerade kostnaderna
$\hat{c}_{32} = c_{32} + y_3 - y_2 = 1 + 3 - 3 = 1 > 0$ (opt),
$\hat{c}_{24} = c_{24} + y_2 - y_4 = 3 + 3 - 7 = -1 < 0$ (opt),
$\hat{c}_{34} = c_{34} + y_3 - y_4 = 5 + 3 - 7 = 1 > 0$ (opt),
$\hat{c}_{56} = c_{56} + y_5 - y_6 = 2 + 5 - 9 = -2 < 0$ (opt).
Vi har nu optimum.

d) Startflödet är redan maxflöde. Minsnitt: (1,3), (2,3) (bakåt) och (2,4).

Vänd båge (2,3). Flödesökande väg: 1 - 2 - 3 - 5 - 6. Kapacitet: 1. Skicka. Nu är det maxflöde. Minsnitt: (4,6), (5,6).

Svar 5

a) Billigaste uppspännande träd: (1,2), (1,3), (4,5), (3,4). Kostnad: 14.

b) Billigaste 1-träd: (1,2), (1,3), (4,5), (3,4), (2,3). Kostnad: 19. Det är en handelsresandetur, så det är optimum.

c) Noderna 1, 2, 4 och 5 har udda valens. Billigaste perfekta matchning för dessa noder är (1,2), (4,5), så dessa bågar ska fördubblas, vilket kostar 8. Eulerturen kostar 51. (Det finns flera.)

d) En oberoende nodmängd ges av noderna 2 och 5. En annan av noderna 1 och 4.

e) Färga varje oberoende nodmängd ovan med en färg, samt nod 3 med den tredje färgen. Grafen innehåller K_3 (noderna 1, 2 och 3, t.ex.) så det krävs minst tre färger.

f) Grafens komplement innehåller bara bågarna (1,4) och (2,5) och de kan ju färgas med en enda färg (det är en matchning).