Tekniska Högskolan i Linköping
Matematiska Institutionen
Optimeringslära
Kaj Holmberg

Kombinatorisk optimering, miljö
Lösning till tentamen
2010-06-11

Svar och kortfattade lösningar

(Dessa lösningar kan användas för att kontrollera huruvida man har rätt svar. De är dock inte säkert tillräckligt detaljerade för att ge full poäng på tentan.)

Uppgift 1

1a: P0: Första LP-opt: $x_1 = 0$, $x_2 = 3/2$, $z = 3/2$. Detta ger $\underline{z} = 2$ (ty min-problem). Avrundning neråt ger ingen tillåten lösning. Avrundning uppåt ger ingen tillåten lösning. Förgrena över x_2.
P1 ($x_2 \leq 1$): $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $z = 3$, (heltal) vilket ger $\bar{z} = 3$.
P2 ($x_2 \geq 2$): Saknar tillåten lösning. Kapa.
Trädet avsökt. Optimum: $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $z = 3$.

1b: Det tillåtna området är bara punkten (1, 1). (Det konvexa höljet ges t.ex. av $x_1 \geq 1$, $x_2 \geq 1$, $x_1 + x_2 \leq 2$.)

Uppgift 2

2a: Billigaste uppspännande träd-problem, lös med Kruskal eller Prims metod. Lösning: (1, 3), (2, 4), (3, 4), (4, 5), (4, 6). Kostnad: 18.

2b: Handelsresandeproblem, NP-svårt.

2c: 1-träd: (1, 2), (1, 3), (2, 4), (3, 4), (4, 5), (4, 6). Kostnad: 22, dvs. rundan blir minst 22 lång.

2d: Aldrigsen bygger upp turen med noderna i ordningen 1, 3, 4, 2, 5, 6, men sedan finns ingen väg hem igen, så heuristiken misslyckas med att hitta en tur (ty grafen är inte fullständig).

2e: Kinesiska brevbärarproblemet. Endast nod 3 och 5 har udda valens, och det billigaste sättet att åtgärda detta är att dubblera bågarna (3, 4) och (4, 5). Exempel på lösning: $1 - 3 - 4 - 6 - 5 - 4 - 2 - 5 - 4 - 3 - 2 - 1$.

2f: Nodfärgning. Grafen innehåller K_3, så minst tre färger krävs. Nod 1 och 4 kan ha samma färg, nod 3 och 5 kan ha samma färg, och nod 2 och 6 kan ha samma färg, så tre färger räcker.

2g: Billigaste väg. (Att grafen är oriktad kan åtgärdas genom att införa dubbla motriktade bågar.) Dijkstras metod ger billigaste väg $1 - 3 - 4 - 6$. Optimalitetsbeviset är nodpriserna, som visar att man inte kan komma till någon nod på ett billigare sätt.

2h: Dyraste enkla väg. Om man glömmer att kräva att vägen ska vara enkel fastnar man (dvs. Fords metod) i en positiv cykel, som kan bli hur lång som helst, så fru Gaabortsen kommer aldrig fram. Problemet är NP-svårt.

2l: Bivillkoren är att varje nod ska ha valens 2:

Nod 1:	$x_{12} + x_{13} = 2$	(1)
Nod 2:	$x_{12} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 2$	(2)
Nod 3:	$x_{13} + x_{23} + x_{34} = 2$	(3)
Nod 4:	$x_{24} + x_{34} + x_{45} + x_{46} = 2$	(4)
Nod 5:	$x_{25} + x_{45} + x_{56} = 2$	(5)
Nod 6:	$x_{46} + x_{56} = 2$	(6)

Bivillkor 1 ger $x_{12} = 1$ och $x_{13} = 1$. Detta ger också $x_{23} = 0$, annars skulle en subtur bildas. Bivillkor 6 ger $x_{46} = 1$ och $x_{56} = 1$. Detta ger också $x_{45} = 0$, annars skulle en subtur bildas. Bivillkor 3 säger nu $1 + 0 + x_{34} = 2$, vilket ger $x_{34} = 1$. Bivillkor 4 säger nu $x_{24} + 1 + 0 + 1 = 2$, vilket ger $x_{24} = 0$. Bivillkor 5 ger nu $x_{25} + 0 + 1 = 2$, dvs. $x_{25} = 1$. Bivillkor 2 är nu uppfyllt och lösningen helt fixerad.

Uppgift 3

3a: Ja, problemet är konvext.

3b: KKT-villkoren:
1. $x_1 + 2x_2 \leq 1$, $x_1^2 \leq 1$.
2. $u_1(x_1 + 2x_2 - 1) = 0$, $u_2(x_1^2 - 1) = 0$.
3. $\begin{pmatrix} 4x_1 - 2 \\ 2x_2 - 1 \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
4. $u_1 \geq 0, u_2 \geq 0$.

I punkt A är inget bivillkor aktivt, så $u_1 =$ och $u_2 = 0$, och 3 har ingen lösning. Ej KKT-punkt.

I punkt B är båda bivillkoren aktiva. 3 blir $u_1 + 2u_2 = -2$ och $2u_1 = 1$, vilket ger $u_1 = 1/2$ och $u_2 = -5/4$. Eftersom $u_2 < 0$ är 4 inte uppfyllt. Ej KKT-punkt.

Punkt C är inte tillåten i 1. Ej KKT-punkt.

I punkt D är endast det andra bivillkoret aktivt, så $u_1 = 0$. 3 ger då $-2u_2 = 6$ och $0 = 0$, vilket ger $u_2 = -3$, som ej uppfyller 4.Ej KKT-punkt.

I punkt E är endast det först bivillkoret aktivt, så $u_2 = 0$. 3 ger då $u_1 = 2/9$, och 4 är uppfyllt. KKT-punkt.

3c: Punkt E är optimal, eftersom problemet är konvext.

Uppgift 4

4a: Den angivna lösningen ger basbågarna (1, 3), (1, 4) och (2, 3). Nodpriserna blir då $y_1 = 0$, $y_2 = 1$, $y_3 = 4$, $y_4 = 5$ och den reducerade kostnaden blir $\hat{c}_{24} = -3$, så x_{24} blir inkommande variabel. Cykeln blir $1 - 3 - 2 - 4 - 1$ (där bågarna (2, 3) och (1, 4) används bakåt), och i den kan man skicka maximalt 3 enheter. Utgående variabel blir då x_{23}. Ny lösning blir $x_{13} = 4$, $x_{14} = 2$, $x_{24} = 3$. Nodpriserna blir nu $y_1 = 0$, $y_2 = 5$, $y_3 = 4$, $y_4 = 6$, och den reducerade kostnaden blir $\hat{c}_{23} = 4$, så vi har optimum. Totalkostnaden blir 31.

4b: Utgå från den optimala lösningen i uppgift a och skicka ytterligare en enhet *via basträdet*, vilket ger $x_{13} = 5$, $x_{14} = 1$, $x_{24} = 4$. Eftersom vi har oförändrad bas, blir nodpriser och reducerad kostnad samma som tidigare, så vi har optimum. Totalkostnaden blir 30, så den har *minskat*. (Att man kan skicka mer till lägre kostnad kallas ibland "transportparadoxen".)

4c: Inget, ty $\hat{c}_{23} = 1 > 0$.

4d: Av de fyra bågarna ska tre vara basbågar, vilket ger fyra möjligheter. Två av dem dök upp i uppgift a. Det visar sig att de andra två möjligheterna inte blir tillåtna på grund av käll-/sänkstyrkorna.

Uppgift 5

5a: Starta med slackvariablerna, x_3 och x_4, i basen. I den första iterationen blir x_2 inkommande och x_4 utgående. I andra iterationen blir x_1 inkommande och x_3 utgående. Därefter fås optimum. Den optimala lösningen är $x_1 = 2, x_2 = 1$ med $z = 7$. Dual optimallösning (skuggpriser) är $y_1 = 1/3$ och $y_2 = 4/3$.

5b: (Standardform.)

5c: Dual optimallösning förskjuts till $y_1 = 0$ och $y_2 = 2$. Tre duala bivillkor är aktiva i den punkten, vilket betyder att den primala optimallösningen inte är unik. En av de optimala är dock den i 5a.

(Mer exakt är följande primala lösningar optimala: $x_1 = 2$, $x_2 = 1$ och $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, samt alla konvexkombinationer av dessa två punkter.)