Tekniska Högskolan i Linköping
Matematiska Institutionen
Optimeringslära
Kaj Holmberg

Kombinatorisk optimering, miljö
Lösning till tentamen
2010-08-26

# Svar och kortfattade lösningar

*(Dessa lösningar kan användas för att kontrollera huruvida man har rätt svar. De är dock inte säkert tillräckligt detaljerade för att ge full poäng på tentan.)*

## Uppgift 1

**1a:** Starta med slackvariablerna, $x_3$, $x_4$ och $x_5$, i basen. I den första iterationen blir $x_1$ inkommande och $x_5$ utgående. I andra iterationen blir $x_3$ inkommande och $x_6$ utgående. Därefter fås optimum. Den optimala lösningen är $x_1 = 1/2, x_2 = 0, x_3 = 1$ (och $x_4 = 1/2, x_5 = 0, x_6 = 0$) med $z = 5$. Bivillkor 2 och 3 är aktiva.

**1b:** Punkter som passerades i 1a: (0, 0, 0), (1/2, 0, 0) och (1/2, 0, 1/2).

**1c:** Nej, ty $\hat{c}_2 = -3/2$ vilket skulle ändras till $\hat{c}_2 = -1/2$, vilket inte ändrar optimum.

**1d:** (Standardform.) $y_1 = 0, y_2 = 3/2, y_3 = 1$.

## Uppgift 2

**2a:** Markera tillåtna riktningar och sök väg med Dijkstras modifierade metod. Man kan skicka 2 enheter till vägen 1 - 3 - 2 - 4 - 5 - 6 - 7. Minsnitt blir (2, 4) och (3, 4).

**2b:** Lösningen i 2a ger basbågarna (1, 3), (2, 3), (2, 4), (4, 5), (6, 5), (6, 7). Nodpriserna blir då $y_1 = 0$, $y_2 = 6$, $y_3 = 10$, $y_4 = 14$, $y_5 = 21$, $y_6 = 17$, $y_7 = 24$, och de reducerade kostnaderna blir $\hat{c}_{12} = -1$, $\hat{c}_{34} = 0$, $\hat{c}_{45} = 1$, $\hat{c}_{67} = 0$, så $x_{45}$ blir inkommande variabel, att minskas. Cykeln blir $4-6-5-4$ (där bågarna (4, 5) och (5, 6) används bakåt), och i den kan man skicka maximalt 3 enheter. Utgående variabel blir då $x_{46}$. Nodpriserna blir nu $y_1 = 0$, $y_2 = 6$, $y_3 = 10$, $y_4 = 14$, $y_5 = 22$, $y_6 = 18$, $y_7 = 25$, och de reducerade kostnaderna blir $\hat{c}_{12} = -1$, $\hat{c}_{34} = 0$, $\hat{c}_{46} = -1$, $\hat{c}_{67} = 0$, vilket indikerar optimum.

**2c:** Använd Dijkstras metod, vilken ger vägen 1 - 2 - 4 - 6 - 7, med kostnad 23.

## Uppgift 3

**3a:** Använd Kruskals eller Prims metod. Kostnad 17.

**3b:** Kostnad för 1-träd: 22, så $\underline{z} = 22$. I lösningen har nod 4 valens 3. Förgrena över nodvalens (fokusera på bågar i lösningen):
P1: Förbjud båge (1, 4).
P2: Förbjud båge (3, 4), tvinga med (1, 4).
P3: Förbjud båge (4, 5), tvinga med (1, 4) och (3, 4), förbjud (2, 4).
P1 ger ett 1-träd med kostnad 23, ej handelsresandetur.
P2 ger ett 1-träd med kostnad 23, ej handelsresandetur.
P3 ger ett 1-träd med kostnad 25, handelsresandetur.
Detta ger undre gränsen 23 och övre gränsen 25.

**3c:** Endast nod 1 och 3 har udda valens. Billigaste vägen mellan dem är 1 - 4 - 3. Dubblera dessa bågar, och finn en Eulertur. Kostnad 63.

**3d:** Variant 1: Utgå från MST, ta bort nod 3, ty den har valens ett. Ger kostnad 11. Variant 2: Finn billigaste väg till närmaste av nod 1, 2, 4. Upprepa. Ger kostnad 9.

## Uppgift 4

**4a:** Den givna lösningen ger $\underline{z} = 6$.
P0: Första LP-opt: $x_1 = 5/8$, $x_2 = 5/4$, $z = 10$. Detta ger $\bar{z} = 10$. (Avrundning neråt ger lösningen $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $z = 5$.) Förgrena över $x_1$:
P1 ($x_1 \leq 0$): $x_1 = 0$, $x_2 = 5/3$, $z = 25/3$, vilket ger $\bar{z} = 8$. Förgrena över $x_2$:
P3 ($x_2 \leq 1, x_1 \leq 0$): $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $z = 5$. Kapa, ty $z < \underline{z}$.
P4 ($x_2 \geq 2, x_1 \leq 0$): Saknar lösning. Kapa.
Backa: P2 ($x_1 \geq 1$): $x_1 = 1$, $x_2 = 1/2$, $z = 17/2$, vilket ger $\bar{z} = 8$. Förgrena över $x_2$:
P5 ($x_2 \leq 0, x_1 \geq 1$): $x_1 = 5/4$, $x_2 = 0$, $z = 15/2$, vilket ger $\bar{z} = 7$. Förgrena över $x_1$:
P7 ($x_1 \leq 1, x_2 \leq 0, x_1 \geq 1$): $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $z = 6$. Kapa.
P8 ($x_1 \geq 2, x_2 \leq 0, x_1 \geq 1$): Saknar lösning. Kapa.
Backa: P6 ($x_2 \geq 1, x_1 \geq 1$): Saknar lösning. Kapa. Trädet avsökt. Ingen bättre lösning funnen.

**4b:** Studera ett bivillkor i taget och kom ihåg heltalskravet. Minimal övertäckning ger bivillkoret $x_1 + x_2 \leq 1$. Om man lägger till det, fås heltalsoptimum i P0, dvs. inga förgreningar behöver göras.

## Uppgift 5

**5a:** Ja, problemet är konvext. Målfunktion och ett bivillkor är linjärt, det andra bivillkoret motsvarar en cirkelskiva.

**5b:** Utan bivillkor 1 fås en linjär målfunktion och ett enda linjärt bivillkor, vilket har en oändlig lösning. Bivillkor 1 ger dock ett begränsat tillåtet område, så bivillkor 1 måste vara aktivt. (Konvexiteten krävs också för denna slutsats.)

**5c:** KKT-villkoren:
1. $x_1^2 + 2x_2^2 \leq 1$, $-2x_1 + x_2 \leq 1$.
2. $u_1(x_1^2 + 2x_2^2 - 1) = 0$, $u_2(-2x_1 + x_2 - 1) = 0$.
3. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 4x_2 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
4. $u_1 \geq 0, u_2 \geq 0$.

Om man löser ut $x$ ur 3, fås $x_1 = (2u_2 - 1)/2u_1$ och $x_2 = (-u_2 - 1)/4u_1$. Vi vet att bivillkor 1 är aktivt i optimum. Antag nu att bivillkor 2 inte är aktivt. Då blir $u_2 = 0$, vilket ger $x_1 = -1/2u_1$ och $x_2 = -1/4u_1$. Insättning i bivillkor 1 ger $(-1/2u_1)^2 + (-1/4u_1)^2 = 1$, vilket ger $u_1 = \sqrt{3}/2$ samt $x_1 = -\sqrt{2/3}$ och $x_2 = -1/\sqrt{6}$. Kontroll i bivillkor 2 ger då $-2x_1 + x2 = \sqrt{3/2} > 1$, dvs. bilvillkor 2 är *inte* uppfyllt.

Vi kan nu dra slutstsen att det inte finns någon KKT-punkt under antagandet att bivillkor 2 inte är aktivt. Alltså måste bivillkor 2 (och bilvillkor 1) vara aktivt i optimum.