Tekniska Högskolan i Linköping
Matematiska Institutionen
Optimeringslära
Kaj Holmberg

Kombinatorisk optimering, miljö
Lösning till tentamen
2011-03-19

Svar och kortfattade lösningar

(Dessa lösningar kan användas för att kontrollera huruvida man har rätt svar. De är dock inte säkert tillräckligt detaljerade för att ge full poäng på tentan.)

Uppgift 1

1a: Ersätt de oriktade bågarna med två riktade, en i varje riktning (eller modifiera metoden så att båda riktningarna beaktas). Finn billigaste väg från nod 2 till nod 7 med Dijkstras metod, $O(n^2)$. Svar: Väg 2 - 4 - 6 - 7, längd 840 m.

1b: Dela upp problemet: Finn billigaste väg från nod 1 till nod 2 (kör ut bilen), finn billigaste väg från nod 2 till nod 7 (gör transporten) och finn billigaste väg från nod 7 till nod 1 (kör hem bilen). Svar: Tur 1 - 2 - 4 - 5 - 6 - 7 - 6 - 4 - 1, längd 1840 m.

1c: Variabeldefinition:
$x_1 = 1$ om vi använder Spajker Post, 0 om inte.
$x_2 = 1$ om vi använder Elvan med bensin, 0 om inte.
$x_3 = 1$ om vi använder Elvan med eldrift, 0 om inte.

Koefficienter: Total sträcka: $s = \sum_{(ij)\in P} c_{ij}$.
Utsläpp: Spajker: $u_1 = 0.2s$, Elvan bensin: $u_2 = 0.1s$, Elvan el: $u_3 = 0$.
Tid: Spajker: $t_1 = 0.1s$, Elvan bensin: $t_2 = 0.2s$, Elan el: $t_3 = 0.2s$.
Maxsträcka: $m_1 = M$, $m_2 = M$, $m_3 = 20000$.

Modell:

$$\begin{array}{ll} \min & \sum_j u_j x_j \\ \text{då} & \sum_j t_j x_j \le K \\ & \sum_j x_j = 1 \\ & s x_j \le m_j \quad \forall j \\ & x_j \in \{0,1\} \quad \forall j \end{array}$$

Kommentar: Bivillkoret $sx_j \le m_j$ ger helt enkelt $x_j = 0$ om $m_j < s$.

1d: Från uppgift b: $s = 1840$.
Utsläpp: Spajker: $u_1 = 368$, Elvan bensin: $u_2 = 184$, Elvan el: $u_3 = 0$.
Tid: Spajker: $t_1 = 184$, Elvan bensin: $t_2 = 368$, Elan el: $t_3 = 368$.
(Maxsträcka: redundant.)

Modell:

$$\begin{array}{rl} \min & 368x_1 + 184x_2 \\ \text{då} & 184x_1 + 368x_2 + 368x_3 \leq 2000 \\ & x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ & x_j \in \{0, 1\} \quad \forall j \end{array}$$

Det första bivillkoret är redundant (dvs. tiden räcker gott och väl till), så det enda som återstår är ett kappsäcksproblem med koefficienter 1 i bivillkoret. Optimum får då helt enkelt genom att välja den variabel med bäst målfunktionskoefficient, vilket ger $x_3 = 1$. Det är alltså optimalt att köra Nissum Elvan med eldrift.

(Om K hade varit 200, hade vi behövt fixera x_2 och x_3 till noll, och lösningen hade varit $x_1 = 1$.)

1e: Variablerna behöver inte vara heltal, så lösningen kan innehålla en mix av bilar/körsätt. Dessutom innebär bivillkoret $sx_j \leq m_j$ bara att $x_j \leq m_j/s$.

Lösningen i uppgift d förändras ej.

1f: Kinesiska brevbärarproblemet. Finn extravägar mellan noder med udda valens, i detta fall bara nod 2 och 3. Båge (2, 3) ska alltså köras två gånger (en extra).

1g: Nodövertäckningsproblemet, *NP*-fullständigt. En tillåten lösning är noderna 1, 3, 4, 6.

1h: Handelsresandeproblemet. Kostnad för föreslagen lösning: 227, så $\bar{z} = 227$. Kostnad för 1-träd: 206, så $\underline{z} = 206$. I lösningen har nod 4 valens 4. Förgrena över nodvalens:
P1: Förbjud båge (1, 4).
P2: Förbjud båge (2, 4), tvinga med (1, 4).
P3: Förbjud båge (4, 5), tvinga med (1, 4) och (2, 4), förbjud (4, 6).
P1 saknar 1-träd.
P2 ger ett 1-träd med kostnad 222, ej handelsresandetur.
Nod 4 har valens 3. Förgrena (utan att bryta mot tidigare förgreningar):
P4: Förbjud båge (4, 5).
P5: Förbjud båge (4, 6), tvinga med (4, 5).
(Flera möjligheter finns ej.)

P4 ger ett 1-träd med kostnad 225. Nu har nod 6 valens 3. Förgrena:
P6: Förbjud båge (4, 6).
P7: Förbjud båge (5, 6), tvinga med (4, 6).
P8: Förbjud båge (6, 7), tvinga med (4, 6) och (5, 6), förbjud (3, 6).
P6 saknar 1-träd (p.g.a. nod 4).
P7 saknar 1-träd (p.g.a. nod 5).
P8 ger ett 1-träd med kostnad 253. Kapa.

Backa tillbaka. P5 ger ett 1-träd med kostnad 227, och som är en tur. (Samma som den föreslagna turen.) Kapa (ty ej bättre).

Backa tillbaka. P3 ger ett 1-träd med kostnad 234, kapa.

Trädet är nu avsökt, och vi hittade ingen bättre lösning. Den föreslagna lösningen var alltså optimal.

1i: Steinerträdsproblemet, *NP*-svårt. Heuristik: Finn MST, ta bort sådant som inte behövs. det ger ger ett träd som även innehåller noderna 4 och 6. Bågar: (1, 4), (4, 5), (4, 6), (6, 7). Kostnad: 107.

Uppgift 2

2a: Variabeldefinition: x_j = medelhastighet på vägsträcka j.
Indata: s_j längd av sträcka j, u_j maxhastighet för sträcka j, T max tillåten tid. Härledd undre gräns: $l_j = s_j/T$.

Modell:

$$\begin{array}{rll} \min & f(x) = \sum_j f_j(x_j) & \\ \text{då} & \sum_j s_j/x_j \leq T & \\ & l_j \leq x_j \leq u_j & \forall j \end{array}$$

Med siffror:

$$\begin{array}{rl} \min & f(x) = -10x_1 + 0.1x_1^2 - 10x_2 + 0.125x_2^2 \\ \text{då} & 10000/x_1 + 12000/x_2 \leq 1000 \\ & 10 \leq x_1 \leq 40 \\ & 12 \leq x_2 \leq 25 \end{array}$$

Jag skalar om första bivillkoret till $10/x_1 + 12/x_2 \leq 1$. (Ej nödvändigt.)

Målfunktionen är konvex (summan av konvexa delar). Det första bivillkoret är konvext (summan av konvexa delar, ty $x_j > 0$). Resterande bivillkor är linjära. Alltså är problemet konvext.

2b: KKT-villkoren: (Antag att de (härledda) undre gränserna inte är aktiva.)
KKT1: $10/x_1 + 12/x_2 \leq 1$, $10 \leq x_1 \leq 40$, $12 \leq x_2 \leq 25$.
Koll: Punkten $x_1 = 25$, $x_2 = 40$ är tillåten.
KKT2: $u_1(10/x_1 + 12/x_2 - 1) = 0$, $u_2(x_1 - 40) = 0$, $u_3(x_2 - 25) = 0$.
Koll: $u_1 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} -10 + 0.2x_1 \\ -10 + 0.25x_2 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
Koll: Sätt in x och lös, vilket ger $u_2 = 5$ och $u_3 = 0$.
KKT4: $u \geq 0$.
Koll: Uppfyllt, så KKT-villkoren är uppfyllda.
Eftersom problemet är konvext, är denna lösning optimal.

2c: Lös $\nabla f(x) = 0$, vilket ger $x_1 = 50$ och $x_2 = 40$, dvs. första delen med 50 m/s och andra delen med 40 m/s. (Att vi fick $x_2 = 40$ både med och utan bivillkor förklarar att $u_3 = 0$.)

Uppgift 3

3a: Lös med ungerska metoden. Vi får $\alpha = (10, 11, 13, 10, 11)$ och $\beta = (0, 0, 0, 5, 2)$ efter första fasen. Därefter fås lösningen $x_{12} = 1$, $x_{24} = 1$, $x_{33} = 1$, $x_{41} = 1$, $x_{55} = 1$. Kostnaden är 62.

3b: Från uppgift a fick vi $\hat{c}_{23} = 6$, så en minskning med 4 ger ingen ändring.

Uppgift 4

4a: Starta med slackvariablerna i basen. Först blir x_2 inkommande och x_4 utgående, sedan blir x_3 inkommande och x_5 utgående. Optimum är $x_1 = 0$, $x_2 = 3/4$, $x_3 = 3/4$, $z = 9/4$, och är inte unikt. Båda bivillkoren är aktiva.

4b: LP-dualen blir:

$$
\begin{array}{llrcrcl}
\min & z = & 3y_1 & + & 3y_2 & & \\
\text{då} & & 2y_1 & + & y_2 & \geq & 1 \\
& & 4y_1 & + & 2y_2 & \geq & 2 \\
& & & & 2y_2 & \geq & 1 \\
& & y_1, & & y_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Grafisk lösning ger $y_1 = 1/4$, $y_2 = 1/2$. Man ser att duala bivillkor 1 och 2 sammanfaller. Det betyder att ett av bivillkoren är redundant och kan tas bort. Det betyder också att de två motsvarande primala variablernas kolumner är linjärt beroende, så de kan inte vara basvariabler samtidigt. (En av x_1 och x_2 kan fixeras till noll och tas bort. Det är valfritt vilken.)

4c: Det första bivillkoret ger att $x_2 = 0$. I uppgift b kunde man ta bort x_1 eller x_2, men här har man inget val.
P0: Första LP-opt: $x_1 = 3/2$, $x_3 = 3/4$, $z = 2.25$. Detta ger $\bar{z} = 2$. Förgrena över x_3:
P1 ($x_3 \geq 1$): $x_1 = 1$, $x_3 = 1$, $z = 2$. Heltalslösning, $\underline{z} = 2$. Kapa grenen.
Därefter kan P2 kapas direkt.

Trädet avsökt. Optimum: $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $z = 2$.