Tekniska Högskolan i Linköping
Matematiska Institutionen
Optimeringslära
Kaj Holmberg

Kombinatorisk optimering miljö
Lösning till tentamen
2011-06-10

Svar och kortfattade lösningar

(Dessa lösningar kan användas för att kontrollera huruvida man har rätt svar. De är dock inte säkert tillräckligt detaljerade för att ge full poäng på tentan.)

Uppgift 1

1a: Modell:

$$
\begin{array}{llrcrcll}
\max & z = & 2x_1 & + & 3x_2 & & & \\
\text{då} & & x_1 & + & x_2 & \leq & 3 & (1) \\
& & x_1 & & & \leq & 2 & (2) \\
& & & & x_2 & \leq & 2 & (3) \\
& & x_1, & & x_2 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

Alla hörnpunkter är heltal, så LP-optimum är heltal.

1b: Starta med slackvariablerna i basen. Först blir x_2 inkommande och x_5 utgående. Därefter blir x_1 inkommande och x_3 utgående. Sedan fås optimum: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, ($x_3 = 0$, $x_4 = 1$, $x_5 = 0$) och $z = 8$. Lösning: Gör 1 vindkraftverk av sort 1 och 2 av sort 2.

1c: Läs av skuggpriserna ur optimaltablån: $y_1 = 2$, $y_2 = 0$, $y_3 = 1$. Vinsten ökar med 2 om antalet rotorblad ökas med 1.

1d: Nej. Tre aktiva bivillkor och två variabler ger nödvändigtvis en degenererad baslösning.

1e: LP-dualen blir:

$$
\begin{array}{llrcrcrcll}
\min & z = & 3y_1 & + & 2y_2 & + & 2y_3 & & & \\
\text{då} & & y_1 & + & y_2 & & & \geq & 2 & (1) \\
& & y_1 & & & + & y_3 & \geq & 3 & (2) \\
& & y_1, & & y_2, & & y_3 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

Dual optimallösning är lika med skuggpriserna: $y_1 = 2$, $y_2 = 0$, $y_3 = 1$.

Komplementaritet: Alla duala bivillkor är aktiva. $y_1 > 0$ och $y_3 > 0$, och primala bivillkor 1 och 3 är aktiva.

1f: Alla högerled i optimaltablån är heltal, så inget Gomory-snitt (som skär bort något) kan tas fram.

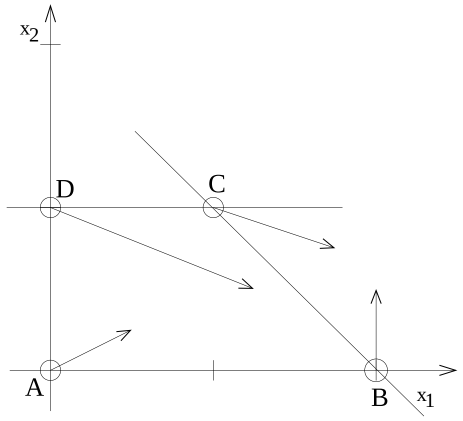
Uppgift 2

2a: Först kan man konstatera att problemet är konvext och att $\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 - 4 - x_2 \\ 4x_2 - 2 - x_1 \end{pmatrix}$.

Det tillåtna området har fyra extrempunkter, $x^A = (0,0)$, $x^B = (2,0)$, $x^C = (1,1)$, $x^D = (0,1)$, med gradienterna

$$\nabla f(x^A) = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}, \nabla f(x^B) = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}, \nabla f(x^C) = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \nabla f(x^D) = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

När man ritar in dem i figuren med omvänt tecken, ser man att halvrummet av förbättringsriktningar innehåller någon tillåten riktning för varje punkt. Ingen av dem är därför optimal.



2b: Skriv först om bivillkoren som $g_1(x) = x_1 + x_2 - 2 \leq 0$, $g_2(x) = x_2 - 1 \leq 0$, $g_3(x) = -x_1 \leq 0$, $g_4(x) = -x_2 \leq 0$.

KKT-villkoren:
KKT1: $x_1 + x_2 \leq 2$, $x_2 \leq 1$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.
KKT2: $u_1(x_1 + x_2 - 2) = 0$, $u_2(x_2 - 1) = 0$, $u_3 x_1 = 0$, $u_4 x_2 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} 2x_1 - 4 - x_2 \\ 4x_2 - 2 - x_1 \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + u_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + u_4 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
KKT4: $u \geq 0$.

Kontroll av punkterna: Punkt A: KKT1: OK. KKT2: $u_1 = 0$, $u_2 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix} + u_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + u_4 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
vilket ger $u_1 = -4$ och $u_2 = -2$. Ej KKT-punkt ty $u_1 < 0$ och $u_2 < 0$.

Punkt B: KKT1: OK. KKT2: $u_2 = 0$, $u_3 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + u_4 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
vilket ger $u_1 = 0$ och $u_4 = -4$. Ej KKT-punkt ty $u_4 < 0$.

Punkt C: KKT1: OK. KKT2: $u_3 = 0$, $u_4 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
vilket ger $u_1 = -1$ och $u_2 = 4$. Ej KKT-punkt ty $u_1 < 0$.

Punkt D: KKT1: OK. KKT2: $u_1 = 0$, $u_4 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + u_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
vilket ger $u_2 = -2$ och $u_3 = -5$. Ej KKT-punkt ty $u_2 < 0$ och $u_3 < 0$.

Ingen av punkterna är en KKT-punkt, och ingen är optimal.

2c: Antagandet ger, via KKT2, att $u_2 = 0$, $u_3 = 0$, $u_4 = 0$, samt att $x_1 + x_2 = 2$, dvs. $x_2 = 2 - x_1$.

KKT-villkoren blir nu:
KKT1: $1 \leq x_1 \leq 2$. KKT2: OK.
KKT3: $\begin{pmatrix} 3x_1 - 6 \\ 6 - 5x_1 \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
vilket ger $x_1 = 3/2$, $x_2 = 1/2$ och $u_1 = 3/2$.

Punkten (1.5, 0.5) uppfyller KKT-villkoren, och eftersom problemet är konvext, är den optimal.

Uppgift 3

3a: Eldrift är alltid billigare än bensindrift, så vi söker billigaste väg med avseende på elkostnaderna. Använd exempelvis Dijkstras metod. Svar: Väg: 1 - 2 - 4 - 6 - 7, kostnad 12. (Ej unik.)

3b: Börja som i uppgift a, men håll reda på återstående laddning. Om laddningen räcker för eldrift, använd den, annars använd bensin.

Detta ger samma väg som ovan, men bara de två första bågarna körs med el, resten med bensin.

3c: Märk varje nod med både nodpris (kostnad för bensin/el) och återstående laddning, samt föregångare.

Behåll alla märkningar där något är bäst, dvs. där nodpriset är lägre för samma eller lägre laddning, och där laddningen är högre för samma eller högre kostnad. (Med andra ord, ta bara bort märkningar där både nodpris och laddning är sämre.) Ta även bort märkningar som skulle ge negativ laddning. Detta gör att en nod kan få flera märkningar. Välj sedan väg vid uppnystningen så att nodpriset minimeras.

Alternativ beskrivning: Definera tillstånd som varje nod man kan komma till *samt* varje möjligt värde på återstående laddning (i detta fall mellan 0 och 5). Finn billigaste väg till varje tillstånd. (Detta kan ses som en kombination av väg- och kappsäcksstrukturerna i dynamisk programmering.)

Uppgift 4

4a: Turen blir A - D - E - B - C - A.

4b: Trädet blir (A,D), (D,E), (B,E) och (C,E).

4c: 1-trädet blir trädet i uppgift b samt båge (A,B). Genom att byta ut båge (B,E) mot (B,C) fås en bättre tur.

4d: Nod E har valens 3 i 1-trädet. Förgena över nodvalens:
P1 = P0 + ($x_{DE} = 0$).
P1 = P0 + ($x_{BE} = 0$,$x_{DE} = 1$).
P1 = P0 + ($x_{BE} = 1$,$x_{DE} = 1$,$x_{CE} = 0$,$x_{AE} = 0$).