Tekniska Högskolan i Linköping
Matematiska Institutionen
Optimeringslära
Kaj Holmberg

Kombinatorisk optimering miljö
Lösning till tentamen
2012-03-10

Svar och kortfattade lösningar

(Dessa lösningar kan användas för att kontrollera huruvida man har rätt svar. De är dock inte säkert tillräckligt detaljerade för att ge full poäng på tentan.)

Uppgift 1

1a: Minkostnadsflödesproblem, men med kostnadskoefficienterna $c_{ij}x_{ij} + 0.1x_{ij}^2$ istället för bara c_{ij}, samt nettosänkstyrkan $b_i - a_i$.

1b: Normalt minkostnadsflödesproblem med nettosänkstyrkan $b_i - a_i$.

1c: Basbågar (alla med positivt flöde): (2,1), (3,7), (4,1), (5,1), (6,5), 7,4), (7,8). Detta ger nodpriserna $y_3 = 0$, $y_7 = 3$, $y_4 = 5$, $y_8 = 6$, $y_1 = 10$, $y_2 = 4$, $y_5 = 8$, $y_6 = 5$, och följande reducerade kostnader: $\hat{c}_{23} = 8$, $\hat{c}_{32} = 0$, $\hat{c}_{24} = 1$, $\hat{c}_{42} = 3$, $\hat{c}_{46} = 3$, $\hat{c}_{64} = 3$, $\hat{c}_{68} = 1$, $\hat{c}_{86} = 3$. (Bågar som är antiparallella med basbågar får alla positiva reducerade kostnader.) Eftersom $\hat{c}_{ij} \geq 0$ för alla (i, j), och alla ickebasbågar har flöde på undre gränsen, är flödet optimalt.

1d: $\hat{c}_{45} = c_{45} + y_4 - y_5 = c_{45} + 5 - 8 = c_{45} - 3 < 0$ ger $c_{45} < 3$.
($\hat{c}_{54} = c_{54} + y_5 - y_4 = c_{54} + 8 - 5 = c_{54} + 3 < 0$ ger $c_{54} < -3$, vilket är omöjligt.)

1e: Vi får $\hat{c}_{32} = 3 + 0 - 4 = -1 < 0$, så x_{32} blir inkommande variabel. Cykeln blir 3 - 2 - 1 - 4 - 7 - 3. Båge (4,1) begränsar flödesändringen till 30, och x_{41} blir utgående variabel. Vi får nu nodpriserna $y_3 = 0$, $y_2 = 3$, $y_1 = 9$, $y_7 = 3$, $y_4 = 5$, $y_8 = 6$, $y_5 = 7$, $y_6 = 4$, och följande reducerade kostnader: $\hat{c}_{14} = 9$, $\hat{c}_{41} = 1$, $\hat{c}_{24} = 0$, $\hat{c}_{42} = 4$, $\hat{c}_{46} = 4$, $\hat{c}_{64} = 2$, $\hat{c}_{68} = 0$, $\hat{c}_{86} = 4$. Eftersom $\hat{c}_{ij} \geq 0$ för alla (i, j), och alla ickebasbågar har flöde på undre gränsen, är flödet optimalt.

1f: Kinesiska brevbärarproblemet. Noderna 1, 2, 6 och 7 har udda valens. Billigaste komplettering av grafen är (2,4), (4,7) samt (1,5) och (5,6). Finn en Eulercykel i denna graf där alla noder nu har jämn valens. Kostnad 44.

1g: Billigaste uppspännande träd. Lös med Kruskals eller Prims metod. Kostnad 17.

1h: Handelsresandeproblem. Bågarna till noder med valens två måste alltid vara med i lösningen, och till noder som därmed får valens två får inga fler bågar gå. Det är trivialt att finna resten av lösningen. Kostnad 24.

1i: Nodfärgningsproblem. Största klick har tre noder, så minst tre färger krävs, och en lösning med tre färger finns, så den är optimal.

1j: Man ersätter varje båge med olinjär kostnad med ett antal (t.ex. 5) parallella bågar för de olika linjära intervallen. Eftersom kostnadsfunktionen är konvex, blir dessa bågar dyrare i rätt ordning, så det nedersta intervallet fylles automatiskt på först. Man får alltså ett normalt minkostnadsflödesproblem med parallella bågar. Utan konvex kostnadsfunktion går ej detta.

Uppgift 2

2a: Modell:

$$\begin{array}{llrcrcrcrl} \max & z = & 6x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & & & \\ \text{då} & & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq & 2 & (1) \\ & & x_1 & & & - & 2x_3 & \leq & 0 & (2) \\ & & 4x_1 & + & 5x_2 & + & 10x_3 & \leq & 20 & (3) \\ & & x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq & 0 & \end{array}$$

1b: Starta med slackvariablerna i basen. Först blir x_1 inkommande och x_5 utgående. Därefter blir x_3 inkommande och x_4 utgående. Sedan fås optimum: $x_1 = 4/3$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2/3$, ($x_4 = 0$, $x_5 = 0$, $x_6 = 8$) och $z = 10$. Lösning: Blanda 1.33 kg vetemjöl med 0.67 kg havremjöl (ingen rågsikt), vilket ger vinsten 10 kr per paket. Det blir precis 2 kg och precis dubbelt så mycket vetemjöl som havremjöl. Kalciummängden blir däremot mindre än gränsvärdet.

1c: Läs av duallösningen/skuggpriserna ur optimaltablån: $y_1 = 5$, $y_2 = 1$, $y_3 = 0$. (LP-dual: Standard.)

1d: Ja, i optimaltablån är $\hat{c}_2 = -1$. En ökning med 2 skulle ge $\hat{c}_2 = 1$, så vi skulle välja x_2 som inkommande variabel och få en annan lösning.

1e: Positiva egenvärden ger att funktionen är strikt konvex. En KKT-punkt är därmed globalt optimal. (Problemet uppfyller CQ.)

Skriv först om bivillkoren som $g_1(x) = x_1 + x_2 + x_3 - 2 \leq 0$, $g_2(x) = x_1 - 2x_3 \leq 0$, $g_3(x) = 4x_1 + 5x_2 + 10x_3 - 20 \leq 0$, $g_4(x) = -x_1 \leq 0$, $g_5(x) = -x_2 \leq 0$. $g_6(x) = -x_3 \leq 0$.

Sätt in punkten $x_1 = 2/3$, $x_2 = 1$ och $x_3 = 1/3$ i KKT-villkoren:
KKT1: Alla bivillkor uppfyllda. OK.
KKT2: Bara bivillkor 1 och 2 är uppfyllda med likhet, så $u_3 = 0$, $u_4 = 0$, $u_5 = 0$, $u_6 = 0$.

KKT3: $\begin{pmatrix} -2 \\ -2/3 \\ 4/3 \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

vilket ger $u_1 = 2/3$ och $u_2 = 4/3$ enligt första ekvationen men $u_2 = 1$ enligt andra ekvationen. Ekvationssystemet saknar med andra ord lösning, så det är ej en KKT-punkt, och därför ej optimum.

Uppgift 3

3a: Variabeldefinition: x_1 är antal järnfilter man köper. x_2 är antal humusfilter man köper. Modell:

$$\begin{array}{llrcrcrl} \min & z = & 20000x_1 & + & 30000x_2 & & & \\ \text{då} & & 2x_1 & + & x_2 & \geq & 5 & (1) \\ & & x_1 & + & 3x_2 & \geq & 4 & (2) \\ & & x_1, & & x_2 & \geq & 0, \text{ heltal} & \end{array}$$

3b: P0: Första LP-opt: $x_1 = 11/5 = 2.2$, $x_2 = 3/5 = 0.6$ och $z = 62000$. Detta ger $\underline{z} = 62000$.
Förgrena över x_2 (störst fraktionell del):
P2 ($x_2 \geq 1$): Grafisk lösning ger $x_1 = 2$ och $x_2 = 1$ med $z = 70000$. Detta är heltal, så $\bar{z} = 70000$. Kapa.
P1 ($x_2 \leq 0$): Grafisk lösning ger $x_1 = 4$ och $x_2 = 0$ med $z = 80000$. Sämre än känd lösning, kapa.
Alla grenar är avsökta, så optimum blir $x_1 = 2$ och $x_2 = 1$. Svar: Köp två järnfilter och ett humusfilter.

3c: Konvexa höljet begränsas av x_2-axeln ner till (0,5), sedan linjen mellan (0,5) och (2,1), sedan linjen mellan (2,1) och (4,0), och sedan x_1-axeln ut åt höger.

Uppgift 4

4a: Finn billigaste väg från nod 3 med Dijkstras metod. Detta ger nodmärkningar på alla noder. Nysta upp från alla noder. Observera att nodpriserna ger information om hur långt det är till vare nod.

4b: För alla noder förutom nod 4 finns alternativa billigaste vägar som ej passerar nod 4 (dvs. som ej ökar något nodpris). För nod 4 ökar tiden till det dubbla på länk (7,4), som fortfarande är kortaste vägen till nod 4. (Kan ett undantag göras för polisen på just den sträckan, blir inga utryckningstider sämre.)