Tekniska Högskolan i Linköping
Matematiska Institutionen
Optimeringslära
Kaj Holmberg

Kombinatorisk optimering miljö
Lösning till tentamen
2012-05-22

Svar och kortfattade lösningar

(Dessa lösningar kan användas för att kontrollera huruvida man har rätt svar. De är dock inte säkert tillräckligt detaljerade för att ge full poäng på tentan.)

Uppgift 1

1a: P0: Första LP-opt: $x_1 = 2.5$, $x_2 = 1.02$ och $z = 110.2$. Detta ger $\bar{z} = 110$.
Förgrena över x_1: Skapa P1 = P0 + $(x_1 \leq 2)$, och P2 = P0 + $(x_1 \geq 3)$.
Lös P1 $(x_1 \leq 2)$: Grafisk lösning ger $x_1 = 2$ och $x_2 = 1.52$ med $z = 95.2$. Detta ger $\bar{z} = 95$.
Förgrena över x_2: Skapa P3 = P1 + $(x_2 \leq 1)$, och P4 = P1 + $(x_2 \geq 2)$.
Lös P3 $(x_1 \leq 2, x_2 \leq 1)$: Grafisk lösning ger $x_1 = 2$ och $x_2 = 1$ med $z = 90$. Detta är heltal, så $\underline{z} = 90$. Kapa.
Lös P4 $(x_1 \leq 2, x_2 \geq 2)$: Grafisk lösning ger $x_1 = 1.52$ och $x_2 = 2$ med $z = 80.8$. För dålig. Kapa.
Lös P2 $(x_1 \geq 3)$: Saknar tillåten lösning. Kapa.
Alla grenar är avsökta, så optimum blir $x_1 = 2$ och $x_2 = 1$. Svar: Gör två ljusstakar och ett stolsben per timme, vilket ger 90 kr i vinst.

1b: $2x_1 \leq 5$ betyder $x_1 \leq 2.5$ vilket betyder $x_1 \leq 2$ om x_1 måste vara heltal. På samma sätt kan $x_1 + x_2 \leq 3.52$ skärpas till $x_1 + x_2 \leq 3$. Grafiskt kan man se att om man tillför dessa två bivillkor fås det konvexa höljet av de tillåtna heltalspunkterna, och alla extrempunkter är heltaliga. Om man använder Land-Doig-Dakins metod, så kommer den första lösningen att vara heltalig, så man behöver inte göra någon förgrening alls.

1c: $x_1 \leq My_1$, $x_2 \leq My_2$, $y_1 + y_2 \leq 1$, $y_1 \in \{0, 1\}$, $y_2 \in \{0, 1\}$.

Här räcker det med $M = 3$. Man kan även eliminera $y_2 = 1 - y_1$ om man vill.

1d: Alla målfunktionsvärden divideras med 10. Skillnaden uppstår när man avrundar.
P0: $\bar{z} = 11$. P1: $\bar{z} = 9$. P3: $\underline{z} = 9$. P4 behöver därför inte lösas.
Så det blev lite lättare att lösa problemet.

Uppgift 2

2a: Starta med slackvariablerna i basen. Först blir x_1 inkommande och x_3 utgående. Därefter blir x_2 inkommande och x_4 utgående. Sedan fås optimum: $x_1 = 2.5$, $x_2 = 1.02$, $x_3 = 0.98$, $(x_3 = 0,\ x_4 = 0)$ och $z = 110.2$. Lösning: Gör 2.5 ljusstakar och 1.02 bordsben vilket ger vinsten 110.2 kr per timme. Det första och andra bivillkoret är aktiva, dvs. borrtid och svarvtid begränsar lösningen.

2b: Läs av skuggpriserna ur optimaltablån: $y_1 = 15$, $y_2 = 10$, $y_3 = 0$. Detta anger möjlig vinst av att öka motsvarande högerled.

2c: (Standard.)

2d: Ny variabel, x_6. $\hat{c}_6 = c_6 - a_6^T y = 20 - 10 = 10 > 0$, så ja, det verkar löna sig.

2e: $y_1 = 1.5$, $y_2 = 1$, $y_3 = 0$.

Uppgift 3

(Detaljer utelämnas.) Punkten $x_1 = 2.5$, $x_2 = 0.5$ ger $u_1 = -4.5$, $u_2 = 9.5$, $u_3 = 0$, så den är ej en KKT-punkt.

För punkten $x_1 = 2$, $x_2 = 1$ ger KKT2 $u_1 = 0$, $u_3 = 0$, men det finns inget värde på u_2 som uppfyller KKT3, så den är ej en KKT-punkt.

Punkten $x_1 = 2$, $x_2 = 2$ är ej tillåten, så den är ej en KKT-punkt.

För punkten $x_1 = 1$, $x_2 = 1$ ger KKT2 $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, $u_3 = 0$, men det finns ingen lösning till KKT3, så den är ej en KKT-punkt.

Ingen av dessa punkter är optimal.

Uppgift 4

4a: Finn billigaste väg från nod 1 med Dijkstras metod. Detta ger nodmärkningar på alla noder. Nysta upp från nod 6 och nod 3. Väg 1 - 5 - 6, kostar 20. Väg 1 - 2 - 3, kostar 21.

4b: Duallösningen är nodpriserna från uppgift a: $y_1 = 0$, $y_2 = 10$, $y_3 = 21$, $y_4 = 9$, $y_5 = 11$, $y_6 = 20$.

4c: $\hat{c}_{25} = c_{25} + y_2 - y_5 = c_{25} + 10 - 11 = c_{25} - 1 < 0$ om $c_{25} < 1$.

Uppgift 5

5a: Basbågar: (1,2), (1,5), (2,3), (4,5), (5,6). Detta ger nodpriserna $y_1 = 0$, $y_2 = 10$, $y_3 = 21$, $y_4 = 4$, $y_5 = 11$, $y_6 = 20$, och följande reducerade kostnader: $\hat{c}_{14} = 5$ (minska), $\hat{c}_{36} = 11$ (minska), $\hat{c}_{46} = -2$ (öka), $\hat{c}_{53} = 2$ (optimalt).

Jag väljer x_{36} som inkommande variabel (att minska). Cykeln blir 6-3-2-1-5-6, och utgående variable blir x_{56}. Ändringen blir 1 enhet. Beräkning av nya nodpriser och nya reducerade kostnader visar att lösningen inte är optimal.

5b: Maximal flödesökande väg blir 1-5-4-6. Skicka 2 enheter. Sedan blir det maxflöde. Ett icke-minsnitt är t.ex. (2,3), (5,3), (5,6), (4,6).

Uppgift 6

6a: Kruskals eller Prims metod. Kostnad 44.

6b: Kostnad 54.

6c: Närmaste granne ger kostnad 60.

6d: $54 \leq z^* \leq 60$.

6e: Förgrena över nodvalens, t.ex. nod 5 som har valens 3.
P1: Förbjud (1,5).
P2: Förbjud (4,5), tvinga med (1,5).
P3: Tvinga med (1,5) och (4,5), förbjud alla andra till nod 5.

Lösning av P1 ger en handelsresandetur med kostnad 56. Optimum? Vem vet.

6f: Kinesiska brevbärarproblemet. Noderna 1, 3, 4 och 6 har udda valens. Billigaste komplettering av grafen är (1,4) och (3,6). Finn en Eulercykel i denna graf där alla noder nu har jämn valens. Kostnad 109.